2026 届高三模拟考试

数学参考答案及评分标准

2026.03

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1—4. B A C B　　5—8. A C C D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. BC　　10. ACD　　11. ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 8　　13. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　14. $(\frac{\pi}{12}+2k\pi,\frac{5\pi}{12}+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解：(1)证明：当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=4-3a_1$，所以 $a_1=1$. ……………………………… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=4(n-1)-3a_{n-1}$ ①，$S_n=4n-3a_n$ ②

②－①得，$a_n=4-3a_n+3a_{n-1}$. ……………………………………………………… 3 分

所以 $4a_n=3a_{n-1}+4$，即 $4(a_n-4)=3(a_{n-1}-4)$. ……………………………… 5 分

又因为 $a_1-4=-3\neq 0$，$\frac{a_n-4}{a_{n-1}-4}=\frac{3}{4}$，

所以，数列$\{a_n-4\}$是以-3 为首项，$\frac{3}{4}$为公比的等比数列. ……………………………… 6 分

(2)由(1)知，$a_n-4=(-3)\times(\frac{3}{4})^{n-1}$，即 $a_n=4-3\times(\frac{3}{4})^{n-1}$. ……………………… 8 分

所以 $b_n=\frac{(4-a_n)\cdot n}{3}=\frac{[4-4+3\times(\frac{3}{4})^{n-1}]\cdot n}{3}=n\times(\frac{3}{4})^{n-1}$. ……………………… 9 分

记$T_n=1\times(\frac{3}{4})^0+2\times(\frac{3}{4})^1+3\times(\frac{3}{4})^2+\cdots+n\times(\frac{3}{4})^{n-1}$ ③，

$\frac{3}{4}T_n=\quad 1\times(\frac{3}{4})^1+2\times(\frac{3}{4})^2+\cdots+(n-1)\times(\frac{3}{4})^{n-1}+n\times(\frac{3}{4})^n$ ④，

③－④得，

$\frac{1}{4}T_n=1+(\frac{3}{4})^1+(\frac{3}{4})^2+\cdots+(\frac{3}{4})^{n-1}-n\times(\frac{3}{4})^n$ ……………………………… 11 分

$=\frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}}-n\times(\frac{3}{4})^n=4-(n+4)\times(\frac{3}{4})^n$ ……………………………… 12 分

所以 $T_n=16-4(n+4)\times(\frac{3}{4})^n$. ……………………………………………………… 13 分

16. 解：(1)证明：因为底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $CD\perp AD$. ……………………………… 1 分

因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，

所以 $CD\perp$平面 PAD，……………………………………………………………… 3 分

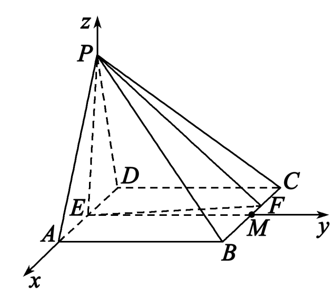
又因为 $CD\subset$平面 PCD，

所以平面 $PAD\perp$平面 PCD. ……………………………………………………… 4 分

(2)因为 $PA=PD=\sqrt{2}$，E 为 AD 的中点，所以 $PE\perp AD$. ………………………… 5 分

又因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$

所以，$PE\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………………………… 6 分



取 BC 的中点为M，以点 E 为坐标原点，分别以 EA，EM，EP 所在的直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则点 $B(1,2,0)$，$C(-1,2,0)$，$P(0,0,1)$，设点 $F(m,2,0)(m\in[-1,1])$，……………………… 7 分

$\overrightarrow{PB}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，设平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1+2y_1-z_1=0\\ 2x_1=0\end{cases}$，

令 $y_1=1$，则 $z_1=2$，所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,2)$. ……………………………………… 9 分

$\overrightarrow{PF}=(m,2,-1)$，$\overrightarrow{EP}=(0,0,1)$，设平面 PEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PF}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{EP}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}mx_2+2y_2-z_2=0\\ z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=2$，则 $y_2=-m$，所以 $n_2=(2,-m,0)$. ……………………………………… 11 分

所以$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|m|}{\sqrt{5}\times\sqrt{4+m^2}}$，$\cos^2\theta=\frac{m^2}{5(4+m^2)}$. ……………………… 13 分

因为$-1\leqslant m\leqslant 1$，$0\leqslant m^2\leqslant 1$，

①当 $m=0$ 时，$\cos\theta=0$；

②当 $m\neq 0$ 时，$0<\cos^2\theta=\frac{1}{5(\frac{4}{m^2}+1)}\leqslant\frac{1}{25}$，$0<\cos\theta\leqslant\frac{1}{5}$. ……………………… 14 分

综上，$\cos\theta$ 的取值范围是$[0,\frac{1}{5}]$. ……………………………………………… 15 分

17. 解：记“智能体在第 i 轮测试中接受 A 类任务”为事件 A_i，$i=1,2,\cdots,n$；

“智能体在第 i 轮测试中接受 B 类任务”为事件 B_i，$i=1,2,\cdots,n$；

“智能体在第 i 轮测试中成功完成任务”为事件 C_i，$i=1,2,\cdots,n$.

则 $P(A_i)=\frac{1}{2}$，$P(B_i)=\frac{1}{2}$，$P(C_i|A_i)=\frac{1}{2}$，$P(C_i|B_i)=\frac{1}{3}$，$i=1,2,\cdots,n$. …… 2 分

(1)由题意得 X 的可能取值为 0，1，2. …… 3 分

$P(X=2)=P(B_1C_1)=P(B_1)\cdot P(C_1|B_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$， …… 4 分

$P(X=1)=P(A_1C_1)=P(A_1)\cdot P(C_1|A_1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$， …… 5 分

$P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$. …… 6 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

(2)由题意知 $P(B_iC_i)=P(B_1C_1)=\frac{1}{6}$，$P(A_iC_i)=P(A_1C_1)=\frac{1}{4}$，$i=1,2,\cdots,n$.

$P(Y=4)=P(B_1C_1)\cdot P(B_2C_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$， …… 7 分

$P(Y=3)=P(B_1C_1)\cdot P(A_2C_2)+P(A_1C_1)\cdot P(B_2C_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$，

…… 8 分

$P(Y\geqslant 3)=P(Y=3)+P(Y=4)=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$. …… 9 分

所以 $P(X=1,Y\geqslant 3)=P(A_1C_1B_2C_2)=P(A_1C_1)\cdot P(B_2C_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$.

…… 10 分

所以 $P(X=1|Y\geqslant 3)=\frac{P(X=1,Y\geqslant 3)}{P(Y\geqslant 3)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{9}}=\frac{3}{8}$. …… 11 分

(3)记智能体在每轮测试中过关的概率为 p，由题意知 $Z\sim B(n,p)$. …… 12 分

且 $p=P(C_i)=P(A_iC_i)+P(B_iC_i)=\frac{5}{12}$. …… 13 分

所以 $E(Z)=np=\frac{5n}{12}$，$D(Z)=np\cdot(1-p)=\frac{35n}{144}$. …… 15 分

18. 解：(1)设 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由题意知 $c=1$，$a+c=3(a-c)$，解得 $a=2$. …… 1 分

所以，$b^2=a^2-c^2=3$. …… 2 分

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 3 分

(2)(i)设点 $M(x_0,y_0)(x_0\neq\pm 2)$，$P(4,p)$，$Q(4,q)$，因为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，$F(1,0)$，

所以，$\overrightarrow{AM}=(x_0+2,y_0)$，$\overrightarrow{AP}=(6,p)$.

因为 $\overrightarrow{AM}/\!/\overrightarrow{AP}$，所以 $p=\frac{6y_0}{x_0+2}$，

所以 $\overrightarrow{FP}=(3,p)=(3,\frac{6y_0}{x_0+2})$. …… 5 分

同理：$\overrightarrow{BM}=(x_0-2,y_0)$，$\overrightarrow{BQ}=(2,q)$，$\overrightarrow{BM}/\!/\overrightarrow{BQ}$，

所以 $q=\frac{2y_0}{x_0-2}$，

所以 $\overrightarrow{FQ}=(3,q)=(3,\frac{2y_0}{x_0-2})$. …… 7 分

所以，$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=9+\frac{12y_0^2}{x_0^2-4}$， …… 8 分

又因为点 $M(x_0,y_0)$在 C 上，所以$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

所以，$y_0^2=3(1-\frac{x_0^2}{4})$. …… 9 分

所以 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=9+\frac{12\times 3(1-\frac{x_0^2}{4})}{x_0^2-4}=0$. …… 10 分

(ii)设 $N(x_2,y_2)$，由(i)知 $m=y_0$，$p=\frac{6y_0}{x_0+2}$，$q=\frac{2y_0}{x_0-2}$，

所以，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{x_0+2}{6y_0}+\frac{x_0-2}{2y_0}=\frac{4x_0-4}{6y_0}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x_0-1}{y_0}$. …… 13 分

设直线 MF 的方程为：$x=ty+1$，由$\begin{cases}x=ty+1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$得$(3t^2+4)y^2+6ty-9=0$.

所以，$\begin{cases}m+n=\frac{-6t}{3t^2+4}\\mn=\frac{-9}{3t^2+4}\end{cases}$. …… 14 分

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{2}{3}t$. …… 15 分

又因为 $x_0=ty_0+1,t=\frac{x_0-1}{y_0}$，

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x_0-1}{y_0}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. ………………………………………… 17 分

19. 解：(1)由题意知，$f'(x)=2x-\frac{a}{x^2}$，………………………………………… 1 分

所以，$f'(1)=2-a$，又因为 $f(1)=1+a$，………………………………………… 2 分

所以，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-(1+a)=(2-a)(x-1)$，

即 $(a-2)x+y+1-2a=0$. ………………………………………… 3 分

(2)法一　当 $x>0$ 时，方程 $x^3-mx+2=0$ 可化为 $m=x^2+\frac{2}{x}$，

则 $x_1^2+\frac{2}{x_1}=m$①，$x_2^2+\frac{2}{x_2}=m$②，………………………………………… 5 分

①−②得 $x_1^2-x_2^2=\frac{2}{x_2}-\frac{2}{x_1}$，即 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)=\frac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}$.

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2=\frac{2}{x_1x_2}$. ………………………………………… 7 分

又因为 $x_1x_2<(\frac{x_1+x_2}{2})^2=\frac{(x_1+x_2)^2}{4}$，

所以 $x_1+x_2=\frac{2}{x_1x_2}>\frac{2}{\frac{(x_1+x_2)^2}{4}}=\frac{8}{(x_1+x_2)^2}$. ………………………………………… 9 分

所以 $(x_1+x_2)^3>8$，$x_1+x_2>2$. ………………………………………… 10 分

法二　当 $x>0$ 时，方程 $x^3-mx+2=0$ 可化为 $m=x^2+\frac{2}{x}$，

原命题等价于当 $a=2$ 时，函数 $y=m$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象在 y 轴右侧有两个交点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，且 $f(x_1)=f(x_2)=m$. ………………………………………… 5 分

因为 $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$，$f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2}(x^3-1)$，

所以，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

　　当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，………………………………………… 6 分

所以，$0<x_1<1<x_2$，于是 $2-x_1>1$. ………………………………………… 7 分

设 $\varphi(x)=f(2-x)-f(x)$，$0<x<1$.

则 $\varphi(x)=[(2-x)^2+\frac{2}{2-x}]-(x^2+\frac{2}{x})=4-4x+\frac{2}{2-x}-\frac{2}{x}$

$=4(1-x)-\frac{4(1-x)}{x(2-x)}=\frac{4(x-1)^3}{x(2-x)}$. ………………………………………… 8 分

所以，当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)=f(2-x)-f(x)<0$.

又 $0<x_1<1$，所以 $f(2-x_1)<f(x_1)=f(x_2)$. ………………………………………… 9 分

又因为 $2-x_1>1$，$x_2>1$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $2-x_1<x_2$，即 $x_1+x_2>2$. ………………………………………… 10 分

(3)①当 $x\geqslant1$ 时，方程 $f(x)=|\ln x|$ 可化为 $\ln x=x^2+\frac{a}{x}(x\geqslant1)$，

当 $x\geqslant1$，$a>0$ 时，$x^2+\frac{a}{x}>x^2\geqslant x>x-1$.

设 $u(x)=x-1-\ln x$，当 $x\geqslant1$ 时，$u'(x)=1-\frac{1}{x}\geqslant0$，

所以 $u(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，又 $u(x)\geqslant u(1)=0$，所以 $u(x)=x-1-\ln x\geqslant0$.

所以 $\ln x\leqslant x-1<x^2+\frac{a}{x}$，此时，方程 $f(x)=|\ln x|$ 无解. ………………………………………… 12 分

②当 $0<x<1$ 时，方程 $f(x)=|\ln x|$ 可化为 $-\ln x=x^2+\frac{a}{x}$，

原问题等价于 $-a=x(\ln x+x^2)(0<x<1)$ 有解.

设 $v(x)=x(\ln x+x^2)$，$0<x<1$，

则 $v'(x)=\ln x+x^2+x(\frac{1}{x}+2x)=3x^2+\ln x+1$，$v''(x)=6x+\frac{1}{x}>0$，

所以，$v'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增. 又因为 $v'(\frac{1}{e})=\frac{3}{e^2}>0$，$v'(\frac{1}{e^2})=\frac{3}{e^4}-1<0$，

所以，$v'(x)$ 在 $x\in(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$ 上存在唯一的零点 x_0，且 $v'(x_0)=0$，

所以，当 $0<x<x_0$ 时，$v'(x)<0$，$v(x)$ 单调递减；

　　当 $x_0<x<1$ 时，$v'(x)>0$，$v(x)$ 单调递增，

所以，$y=v(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值. ………………………………………… 14 分

又因为，当 $x\to0$ 时，$v(x)\to0$，当 $x\to1$ 时，$v(x)\to1$

所以 $-a$ 的取值范围是 $[v(x_0),1)$，a 的取值范围是 $(-1,-v(x_0)]$

所以 $p=-v(x_0)$. ………………………………………… 15 分

因为当 $x_0<x<1$ 时，$v(x)$ 单调递增，$x_0\in(\frac{1}{e^2},\frac{1}{e})$，所以 $v(x_0)<v(\frac{1}{e})$.

所以，$p=-v(x_0)>-v(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}\times(\ln\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2})=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}$. ………………………………………… 17 分