2026 届高三第一学期质量检测

数学参考答案及评分标准

2026.01

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1—4. B B D A　　5—8. C B C D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. ABD　　10. BD　　11. ABD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 4　　13. $(-3,0]$　　14. $\dfrac{11}{24}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解：(1) 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，则

$a_2=a_1+d=4$，$S_6=6a_1+15d=42$，…… 2 分

解得，$a_1=2$，$d=2$. …… 4 分

所以，$a_n=a_1+(n-1)d=2n$. …… 6 分

(2) 由(1)知，$a_{2n-1}=2(2n-1)$，$a_{2n+1}=2(2n+1)$. …… 7 分

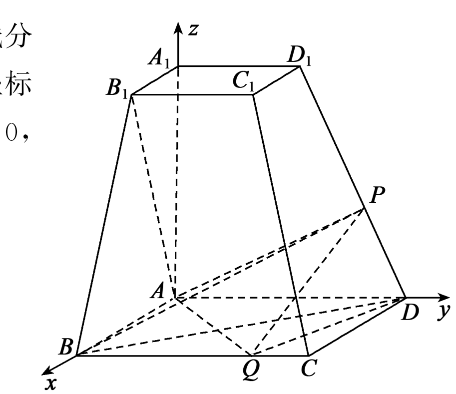
所以 $b_n=\dfrac{1}{4(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ …… 10 分

$$T_n=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$=\dfrac{n}{8n+4}$. …… 13 分

16. 解：以 A 为原点，直线 AB，AD，AA_1 所在的直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(4,0,0)$，$C(4,4,0)$，$D(0,4,0)$，$B_1(2,0,4)$，$D_1(0,2,4)$.



设 $Q(4,m,0)$，$P(0,y,z)$，

(1) 所以 $\overrightarrow{AB_1}=(2,0,4)$，$\overrightarrow{PQ}=(4,m-y,-z)$.

因为 $AB_1\perp PQ$，所以，$\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，

即 $8-4z=0$，

解得 $z=2$.

所以点 P 是棱 DD_1 的中点. …… 6 分

(2) 因为 $V_{A-DPQ}=V_{P-ADQ}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times4\times4\times z=\dfrac{8}{3}$，

所以 $z=1$. …… 8 分

所以 $\overrightarrow{DP}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{DD_1}$，$\overrightarrow{DP}=(0,y-4,1)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,-2,4)$

所以 $y=\dfrac{7}{2}$，$P=(0,\dfrac{7}{2},1)$. …… 10 分

又因为 $\overrightarrow{BD}=(-4,4,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-\dfrac{1}{2},1)$，

设平面 PBD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-4a+4b=0\\ -\dfrac{1}{2}b+c=0\end{cases}$，令 $b=2$，

则 $c=1$，$a=2$.

所以 $\boldsymbol{n}_1=(2,2,1)$，…… 13 分

又平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，

设平面 PBD 与平面 ABD 的夹角为 θ，则

$\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|2\times0+2\times0+1\times1|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}\times1}=\dfrac{1}{3}$. …… 15 分

17. 解：(1) 连接 AP，则 $PA=PQ$，

所以 $PC+PQ=PC+PA=4>AC$. …… 2 分

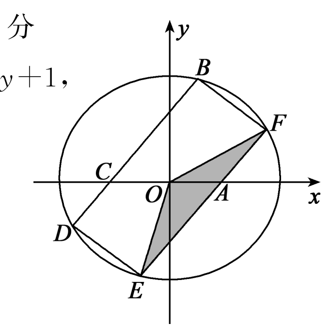
由椭圆定义知，点 P 的轨迹为以 A、C 为焦点的椭圆，且 $c=1$，$a=2$，…… 3 分

所以 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$. …… 4 分

所以 T 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …… 5 分

(2)(i) 四边形 $BDEF$ 为平行四边形，且 O 为其中心. …… 7 分

(ii) 显然直线 BD、EF 的斜率不为 0，设直线 EF 方程为 $x=my+1$，$E(x_1,y_1)$，$F(x_2,y_2)$.



联立 T 的方程 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\ x=my+1\end{cases}$，消 x 得：

$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，显然 $\Delta>0$，

且 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$. ························ 8 分

所以 $S_{BDEF}=4S_{\triangle OEF}=4\times\frac{1}{2}|OA|\cdot|y_1-y_2|$

$=2\times\frac{\sqrt{36m^2+36(3m^2+4)}}{3m^2+4}=\frac{24\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$，························ 10 分

令 $t=\sqrt{m^2+1}$，则 $t\geqslant1$，且 $S_{BDEF}=\frac{24t}{3t^2+1}=\frac{24}{3t+\frac{1}{t}}$ ························ 12 分

令 $f(x)=\frac{24}{3x+\frac{1}{x}}$，显然 $f(x)=\frac{24}{3x+\frac{1}{x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 时单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=6$. ························ 14 分

即 S_{BDEF} 的最大值为 6，此时直线 BD 的方程为 $x=-1$，直线 EF 的方程为 $x=1$.

························ 15 分

18. 解：(1) **解法一**　三个小球放入四个盒子，总样本点个数为 $4^3=64$.

甲盒中恰有 0 个小球，即三个小球放入乙丙丁三盒，共有 $3^3=27$ 种放法.

所以 $P(X=0)=\frac{3^3}{4^3}=\frac{27}{64}$. ························ 1 分

甲盒中恰有 1 个小球. 即先从三个小球中选一个放入甲盒，其余 2 个小球放入乙丙丁三盒中，共有 $C_3^1\times3^2=27$ 种放法.

所以 $P(X=1)=\frac{27}{64}$. ························ 2 分

甲盒中恰有 2 个小球，即先从三个小球中选 2 个放入甲盒，剩下的 1 个小球放入乙丙丁三盒中，共有 $C_3^2\times3=9$ 种放法.

所以 $P(X=2)=\frac{9}{64}$. ························ 3 分

甲盒中恰有 3 个小球，即三个小球全部放入甲盒，有 1 种放法，

所以 $P(X=3)=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$. ························ 4 分

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

故 $E(X)=0\times\frac{27}{64}+1\times\frac{27}{64}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{1}{64}=\frac{3}{4}$. ························ 6 分

解法二　由题意知，$X\sim B(3,\frac{1}{4})$. ························ 2 分

所以，X 的分布列为 $P(X=k)=C_3^k(\frac{1}{4})^k(1-\frac{1}{4})^{3-k}$，$k=0,1,2,3$. ························ 4 分

$E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. ························ 6 分

(2)(i)因为 $\rho(M,N)=\frac{P(MN)-P(M)P(N)}{\sqrt{P(M)P(\overline{M})P(N)P(\overline{N})}}>0$，

所以 $P(MN)-P(M)P(N)>0$， ························ 7 分

又 $P(MN)=P(N)P(M|N)$，

所以 $P(N)(P(M|N)-P(M))>0$，又 $P(N)>0$ ························ 9 分

所以 $P(M|N)>P(M)$成立.

所以事件 M 与 N 正相关. ························ 10 分

(ii)由(1)知 $P(M)=P(X=1)=\frac{27}{64}$，所以 $P(\overline{M})=1-P(M)=\frac{37}{64}$. ························ 11 分

N="甲盒中含有红球"，即红球放入甲盒，黄蓝两个小球随机放入四个盒子，共有 16 种方法，

所以 $P(N)=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$，$P(\overline{N})=1-P(N)=\frac{3}{4}$. ························ 12 分

事件 MN="甲盒中恰有一个小球且为红球"，即红球放入甲盒，黄球和蓝球随机放入乙、丙、丁三个盒中，共有 $3\times3=9$ 种方法.

所以 $P(MN)=\frac{9}{64}$. ························ 14 分

所以 $\rho(M,N)=\frac{P(MN)-P(M)P(N)}{\sqrt{P(M)P(\overline{M})P(N)P(\overline{N})}}=\frac{\frac{9}{64}-\frac{27}{64}\times\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{27}{64}\times\frac{37}{64}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}}=\frac{\sqrt{37}}{37}$ ········ 16 分

因为 $\rho(M,N)>0$，

所以，事件 M 与事件 N 正相关. ························ 17 分

19. 解：(1)因为 $f'(x)=\ln x+1$. ························ 1 分

所以切线的斜率为 $f'(1)=1$. ························ 2 分

又因为 $f(1)=0$. ························ 3 分

所以切线方程为 $y=x-1$. ························ 4 分

(2)(i)因为 $g(x)=f(x+1)-t\sin x=(x+1)\ln(x+1)-t\sin x$，

所以 $g'(x)=\ln(x+1)+1-t\cos x$.

令 $h(x)=g'(x)$,

则 $h'(x)=\dfrac{1}{x+1}+t\sin x$. ………………………………………………………… 5 分

①当 $t\leqslant 0$ 时,因为 $x\in(0,\pi)$,所以 $(x+1)\ln(x+1)>0$, $t\sin x\leqslant 0$,

所以 $g(x)>0$ 恒成立,此时 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内无零点. ……………………………… 6 分

②当 $0<t\leqslant 1$ 时,因为 $x\in(0,\pi)$,所以 $h'(x)>0$,

则 $g'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增.

所以 $g'(x)>g'(0)=1-t\geqslant 0$,所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增.

又 $g(x)>g(0)=0$,

此时, $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内无零点. ………………………………………………………… 8 分

③当 $t>1$ 时,因为 $x\in(0,\pi)$,所以 $h'(x)>0$,则 $g'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增.

因为 $g'(0)=1-t<0$, $g'(\dfrac{\pi}{2})=1+\ln(\dfrac{\pi}{2}+1)>0$,

所以存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,使得 $g'(x_0)=0$,

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减,

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增.

又因为 $g(0)=0$,所以 $g(x_0)<0$.

因为 $g(\pi)=(\pi+1)\ln(\pi+1)>0$,

所以 $g(x)$ 在区间 (x_0,π) 内有 1 个零点. …………………………………………… 11 分

综上所述:当 $t\in(-\infty,1]$ 时, $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的零点个数为 0,

当 $t\in(1,+\infty)$ 时, $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的零点个数为 1. …………………… 12 分

(ii)证明:由(i)知,当 $t=1$ 且 $x\in(0,\pi)$ 时,

$g(x)=(x+1)\ln(x+1)-\sin x>0$,

所以 $(x+1)\ln(x+1)>\sin x$,即 $\dfrac{1}{x+1}\cdot\sin x<\ln(x+1)$. ………………………… 13 分

令 $x=\dfrac{1}{n}$,则 $\dfrac{n}{n+1}\cdot\sin\dfrac{1}{n}<\ln\dfrac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n$, ………………………… 15 分

所以 $\dfrac{1}{2}\sin 1<\ln 2-\ln 1$, $\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{1}{2}<\ln 3-\ln 2$, $\cdots$, $\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{1}{n}<\ln(n+1)-\ln n$,

所以 $\dfrac{1}{2}\sin 1+\dfrac{2}{3}\sin\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{1}{n}<\ln(n+1)$. ……………………………… 17 分