

2025~2026 学年度第一学期期中质量检测

高二数学试题参考答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	D	D	A	A

二、多项选择题(每小题 6 分，共 18 分)

9. AD 10. AD 11. ABD

三、填空题(每小题 5 分，共 15 分)

12. $\frac{7}{3}$ 13. -1
14. $\sqrt{17}$

四、解答题(共 77 分)

（注意：答案仅提供一种解法，学生的其他正确解法应依据本评分标准，酌情赋分.）

15.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $A(-2, -1)$ ， $C(6, -3)$ ，

所以 AC 的中点 E 的坐标为 $(2, -2)$ 2 分

又 $k_{BE} = \frac{4 - (-2)}{3 - 2} = 6$ 4 分

所以边 AC 上的中线所在的直线方程为 $y - 4 = 6(x - 3)$ ，

即 $6x - y - 14 = 0$ 6 分

（Ⅱ）因为 $B(3, 4)$ ， $C(6, -3)$ ，

所以 $k_{BC} = \frac{4 - (-3)}{3 - 6} = -\frac{7}{3}$ 8 分

设边 BC 上的高所在的直线的斜率为 k ，

所以 $k \cdot k_{BC} = -1$ ，

得 $k = \frac{3}{7}$ 11 分

所以边 BC 上的高所在的直线方程为 $y + 1 = \frac{3}{7}(x + 2)$,

即 $3x - 7y - 1 = 0$ 13 分

16. (本小题满分 15 分)

解: (I) 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$,

由已知可得 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\pi}{3}$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{\pi}{4}$ 1 分

故 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2 分

在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中:

$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} = -\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 4 分

故 $|\overrightarrow{BD_1}|^2 = (-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2$

$$= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$= 2$ 6 分

故 $|\overrightarrow{BD_1}| = \sqrt{2}$ 7 分

(II) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$

故 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AA_1} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

$= 0$ 10 分

则 $BD \perp AA_1$,

又四边形 $ABCD$ 是菱形, 故 $BD \perp AC$ 13 分

又 $AA_1 \cap AC = A$, $AA_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

所以 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 15 分

17. (本小题满分 15 分)

解: (I) 因为 $\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 1$, $AD = 2AB = 2$,

在 $\triangle ABC$ 中, 则 $AB \perp AC$ 2 分

又 $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

又 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

则有 $PA \perp AB$, $PA \perp AC$ 3 分

所以以 A 为原点, 以 AB 为 x 轴, 以 AC 为 y 轴, 以 AP 为 z 轴, 建立如图示的空间直角坐标 4 分

则 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,\sqrt{3},0)$, $D(-1,\sqrt{3},0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$,

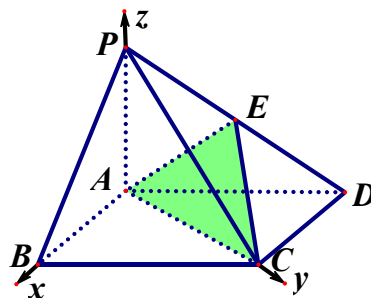
PD 的中点 $E(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 5 分

设平面 AEC 法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}y = 0 \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases},$$

取 $z = 1$, 则 $x = \sqrt{3}$, $y = 0$,

故 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 0, 1)$ 8 分



又 $\overrightarrow{BP} = (-1, 0, \sqrt{3})$

故 $\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BP} = -\sqrt{3} + 0 + \sqrt{3} = 0$.

所以 $PB \parallel$ 平面 AEC 10 分

(II) 因为 $\overrightarrow{BA} = (-1, 0, 0)$,

由 (I) 知平面 AEC 法向量 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 0, 1)$,

则点 B 与平面 AEC 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{|-1 \times \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 15 分

18. (本小题满分 17 分)

解: (I) 因为圆 C 位于 y 轴右侧, 且与 y 轴相切于点 $P(0, 1)$,

所以圆心 C 在直线 $y = 1$ 上. 1 分

如图: 连接 CA , CB , 作 CM 垂直于 x 轴, 垂足为 M

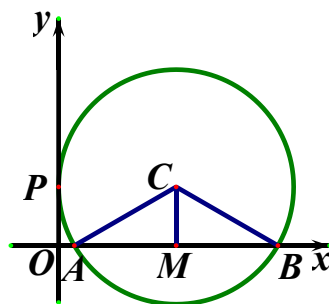
又圆 C 被 x 轴分成的两段弧之比为 $1:2$,

所以 $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $\angle CAB = \frac{\pi}{6}$ 3 分

故 $|PC| = |AC| = 2|CM| = 2$ 5 分

圆心 C 的坐标为 $(2, 1)$, 半径为 2 7 分

所求圆 C 的方程为: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.



..... 8 分

(II) ①若直线 l 斜率存在,

设直线 l 的方程为: $y = k(x-3)$,

即 $kx - y - 3k = 0$ 9 分

因为以线段 EF 为直径的圆恰好过圆心 C ,

所以 $EC \perp FC$, 又 $|EC| = |FC| = 2$,

所以 $|EF| = 2\sqrt{2}$ 12 分

又圆心 $C(2,1)$ 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2k-1-3k|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$,

所以 $(\frac{1}{2}|EF|)^2 + d^2 = 4$ 13 分

即 $2 + \frac{(k+1)^2}{k^2+1} = 4$, 解得: $k = 1$ 14 分

所求直线 l 的方程为 $y = x - 3$,

即 $x - y - 3 = 0$; 15 分

②若直线 l 斜率不存在,

此时直线 l 的方程为: $x = 3$,

则点 E, F 的坐标分别为 $(3, 1-\sqrt{3}), (3, 1+\sqrt{3})$ 16 分

此时 $EC \perp FC$ 不成立, 不合题意.

综上所述: 所求直线的方程为 $x - y - 3 = 0$ 17 分

19. (本小题满分 17 分)

解: (I) 因为直线 l 的点方向式方程为 $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{2} = -z$,

所以直线 l 的一个方向向量坐标为 $\mathbf{m} = (\sqrt{2}, 2, -1)$ 1 分

因为平面 α 的一般式方程为 $2x - \sqrt{2}y + z + 5 = 0$,

可知平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, -\sqrt{2}, 1)$ 2 分

设直线 l 与平面 α 所成角为 θ ,

$$\text{故 } \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} \right| = \left| \frac{2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} \right| = \frac{1}{7}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 因为 $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, 不妨设 $C \neq 0$,

在平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 内取一点 $Q(0, 0, -\frac{D}{C})$,

则向量 $\overrightarrow{QP} = (x_0, y_0, z_0 + \frac{D}{C})$ 5 分

取平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的一个法向量 $\mathbf{m}_1 = (A, B, C)$ 6 分

所以点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为:

$$d = \frac{|\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{m}_1|}{|\mathbf{m}_1|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为 $Q = \{(x, y, z) \mid |x| + |y| + |z| = 1\}$,

故 Q 表示 $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ 这六个顶点形成的正八面体.

..... 9 分

设内切球的半径为 r , 则 r 即为原点 O 到平面 $x + y + z = 1$ 的距离,

$$\text{则 } r = \frac{|0 + 0 + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{所以内切球的表面积为 } S = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{3}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(III) 因平面 ABB_1A_1 经过三点 $P(1, 0, 0)$, $Q(2, 1, -1)$, $H(-1, 0, 2)$,

可得 $\overrightarrow{QP} = (-1, -1, 1)$, $\overrightarrow{HP} = (2, 0, -2)$,

设侧面 ABB_1A_1 所在平面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}_1 = -x_1 - y_1 + z_1 = 0 \\ \overrightarrow{HP} \cdot \mathbf{n}_1 = 2x_1 - 2z_1 = 0 \end{cases},$$

令 $x_1 = 1$ ，解得 $y_1 = 0$ ， $z_1 = 1$ ，

可得 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 1)$ 12 分

由平面 BCC_1B_1 的一般式方程 $x - y + 2z + 4 = 0$ ，

可知平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (1, -1, 2)$.

设平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 的交线 BB_1 的方向向量为 $\mathbf{a} = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{a} = x_2 + z_2 = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{a} = x_2 - y_2 + 2z_2 = 0 \end{cases},$$

令 $x_2 = 1$ ，则 $y_2 = -1$ ， $z_2 = -1$ ，

可得 $\mathbf{a} = (1, -1, -1)$ 14 分

因为侧面 ACC_1A_1 所在平面的一般式方程为 $mx + 2y + 3mz + 1 = 0$ ，

可知平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\mathbf{n}_3 = (m, 2, 3m)$ ，

由 $\mathbf{n}_3 \perp AA_1$ ， $AA_1 \parallel BB_1$ ，

则 $\mathbf{n}_3 \perp \mathbf{a}$ ，

$$\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{a} = m - 2 - 3m = 0，$$

解得 $m = -1$ ，

即 $\mathbf{n}_3 = (-1, 2, -3)$ 16 分

故平面 ABB_1A_1 与平面 ACC_1A_1 夹角的余弦值为：

$$|\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \rangle| = \left| \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_3|} \right| = \left| \frac{1 \times (-1) + 0 \times 2 + 1 \times (-3)}{\sqrt{2} \times \sqrt{14}} \right| = \frac{2\sqrt{7}}{7}. \text{ 17 分}$$