

2026 届高三定时训练

数学试题参考答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	B	C	B	D	D

二、多项选择题(每小题 6 分，共 18 分)

9. BD 10. BCD 11. BCD

三、填空题(每小题 5 分，共 15 分)

12. **R** 13. 7 14. 8

四、解答题(共 77 分)

(注意：答案仅提供一种解法，学生的其他正确解法应依据本评分标准，酌情赋分.)

15.（本小题满分 13 分）

解：（ I ）因为函数 $f(x)$ 的图象上相邻两个对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，

$$\text{所以 } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } T = \pi,$$

$$\text{所以 } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2.$$

$$\text{所以 } f(x) = \sin(2x + \varphi). \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又因为 $f(x)$ 的图象关于 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 中心对称，

$$\text{所以 } 2 \times (-\frac{\pi}{6}) + \varphi = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{以 } \varphi = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{由 } |\varphi| < \frac{\pi}{2} \text{ 可得, } \varphi = \frac{\pi}{3},$$

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 6 分

(II) 因为 $x_1, x_2 \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$,

所以 $2x_1 + \frac{\pi}{3} \in (0, \pi)$, $2x_2 + \frac{\pi}{3} \in (0, \pi)$.

因为 $f(x_1) = f(x_2)$,

所以 x_1, x_2 关于对称轴对称. 9 分

因为函数 $y = \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 上的对称轴只有 $x = \frac{\pi}{2}$,

所以 $\frac{2x_1 + \frac{\pi}{3} + 2x_2 + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{2}$,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$ 12 分

所以 $f(x_1 + x_2) = \sin(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 13 分

16. (本小题满分 15 分)

解: (I) 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 设首项为 $a_1 (a_1 > 0)$, 公比为 q ,

则 $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$a_{n+1} = a_1 q^n$,

所以 $a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 q^{2n-1} = \frac{a_1^2}{q} q^{2n} = 4^n = 2^{2n}$ 3 分

所以 $q = 2$, $a_1^2 = 2$, 则 $a_1 = \sqrt{2}$,

所以 $a_n = \sqrt{2} \times 2^{n-1} = 2^{\frac{2n-1}{2}}$ 6 分

(II) 因为 $a_1 = 1$, $a_n \cdot a_{n+1} = 4^n$, 所以 $a_2 = 4$ 7 分

因为 $a_n \cdot a_{n+1} = 4^n$, 所以 $a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 4^{n+1}$,

所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 4$ 10 分

所以 $\frac{a_{n+2} + a_{n+3}}{a_n + a_{n+1}} = 4$ 11 分

又 $a_1 + a_2 = 5$,

则 $S_{2n} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-1} + a_{2n}$
$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$
$$= \frac{5(1-4^n)}{1-4} = \frac{5}{3}(4^n - 1)$$
 15 分

17. (本小题满分 15 分)

解: (I) 由定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{m-3^x}{3+3^{x+1}}$ 是奇函数,

可得 $f(0) = 0$, 即 $m-1=0$, 可得 $m=1$ 2 分

所以 $f(x) = \frac{1-3^x}{3+3^{x+1}}$.

此时又 $f(-x) = \frac{1-3^{-x}}{3+3^{-x+1}} = \frac{(1-3^{-x}) \cdot 3^x}{(3+3^{-x+1}) \cdot 3^x} = -\frac{1-3^x}{3+3^{x+1}} = -f(x)$,

故 $f(x) = \frac{1-3^x}{3+3^{x+1}}$ 4 分

$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数. 6 分

(II) 由于 $f(\log_4 x \cdot \log_2 \frac{16}{x}) + f(\frac{1}{2} - a) < 0$ 恒成立

故 $f(\log_4 x \cdot \log_2 \frac{16}{x}) < -f(\frac{1}{2} - a)$ 恒成立,

即 $f(\log_4 x \cdot \log_2 \frac{16}{x}) < f(a - \frac{1}{2})$ 7 分

由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,

可得 $a - \frac{1}{2} < \log_4 x \cdot \log_2 \frac{16}{x}$ 恒成立. 8 分

令 $t = \log_2 x$, 因为 $x \in [\frac{1}{2}, 8]$, 所以 $t \in [-1, 3]$

由 $y = \log_4 x \cdot \log_2 \frac{16}{x} = \frac{1}{2} \log_2 x \cdot (4 - \log_2 x)$ 11 分

$$= -\frac{1}{2}(\log_2^2 x - 4 \log_2 x)$$

$$= -\frac{1}{2}[(\log_2 x - 2)^2 - 4]$$

$$= -\frac{1}{2}[(t - 2)^2 - 4],$$

故当 $t = -1$, 即 $\log_2 x = -1$, 即 $x = \frac{1}{2}$ 时,

$y = \log_4 x \cdot \log_2 \frac{16}{x}$ 取得最小值 $-\frac{5}{2}$ 14 分

所以 $a - \frac{1}{2} < -\frac{5}{2}$, 解得 $a < -2$.

即 a 的取值范围是 $(-\infty, -2)$ 15 分

18. (本小题满分 17 分)

解: (I) 由柯西不等式可得:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 2^2) \geq (x + 2y + 2z)^2. 4 分$$

又因为 $x + 2y + 2z = 3\sqrt{3}$,

$$\text{所以 } (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 2^2) \geq (3\sqrt{3})^2,$$

即得 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ 5 分

当且仅当 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ 时, 等号成立.

又 $x + 2y + 2z = 3\sqrt{3}$, 解得 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

即当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = z = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时, $x^2 + y^2 + z^2$ 取得最小值 3. 8 分

(II) 由柯西不等式可得

$[x + (3x - 32) + 4(17 - x)] \cdot [1^2 + 1^2 + (\frac{1}{2})^2] \geq (\sqrt{x} + \sqrt{3x - 32} + \sqrt{17 - x})^2$.
..... 13 分

即 $36 \cdot [1^2 + 1^2 + (\frac{1}{2})^2] \geq (\sqrt{x} + \sqrt{3x - 32} + \sqrt{17 - x})^2$,

得 $(\sqrt{x} + \sqrt{3x - 32} + \sqrt{17 - x})^2 \leq 81$,

化简得 $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 32} + \sqrt{17 - x} \leq 9$ 14 分

当且 $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{3x - 32}}{1} = 2\sqrt{4(17 - x)}$ 时, 即 $x = 16$ 时等号成立,

故 $\sqrt{x} + \sqrt{3x - 32} + \sqrt{17 - x}$ 的最大值为 9. 17 分

19. (本小题满分 17 分)

解: (I) 函数 $f(x) = x \ln a$, $g(x) = a \ln x$,

对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq g(x)$,

即 $\frac{\ln a}{a} \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立. 1 分

构造函数 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$,

求导得 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

故当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$$h(x)_{\max} = h(e) = \frac{1}{e},$$

$$\text{则 } \frac{\ln a}{a} \geq \frac{1}{e}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } a > 0, \text{ 得 } h(a) \leq \frac{1}{e}, \text{ 即 } \frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{e}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } \frac{\ln a}{a} = \frac{1}{e}, \text{ 解得 } a = e,$$

$$\text{所以实数 } a \text{ 的取值集合是 } \{e\}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 知, $g(x) = e \ln x$,

$$\text{故 } G(x) = e \ln(|x+2|) - \frac{1}{2}x^2 + 2x, \text{ 函数 } G(x) \text{ 的定义域为 } \{x | x \neq -2\}.$$

$$\text{求导得 } G'(x) = \frac{e}{x+2} - x + 2 = \frac{e+4-x^2}{x+2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } G'(x) = 0, \text{ 解得 } -x_1 = x_2 = \sqrt{e+4}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{要证 } G(x_2) - 4x_2 - 4 < -G(-x_1) - 4x_1,$$

$$\text{即证 } G(x_2) - 4x_2 - 4 < -G(x_2) + 4x_2,$$

$$\text{只要证 } G(x_2) - 4x_2 - 2 < 0. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} G(x_2) - 4x_2 - 2 &= e \ln(x_2 + 2) - \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_2 - 4x_2 - 2 \\ &= e \ln(x_2 + 2) - \frac{1}{2}(x_2 + 2)^2, \end{aligned}$$

$$\text{令函数 } \varphi(x) = e \ln x - \frac{1}{2}x^2, \quad (x > 4).$$

$$\text{求导得 } \varphi'(x) = \frac{e}{x} - x, \text{ 函数 } \varphi'(x) \text{ 在 } (4, +\infty) \text{ 上单调递减},$$

$$\varphi'(x) < \varphi'(4) = \frac{e}{4} - 4 < 0,$$

函数 $\varphi(x)$ 在 $(4, +\infty)$ 上单调递减,

故 $\varphi(x) < \varphi(4) = 2e \ln 2 - 8 < 2e - 8 < 0$,

而 $x_2 + 2 = \sqrt{e+4} + 2 > 4$,

因此 $\varphi(x_2 + 2) < \varphi(4) < 0$,

所以 $G(x_2) - 4x_2 - 4 < -G(-x_1) - 4x_1$ 11 分

(Ⅲ) 由(Ⅱ)易知函数 $\varphi(x) = e \ln x - \frac{1}{2}x^2$ 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减,

由 $(\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{9} > \frac{11}{4} = 2.75 > e$, 得 $\frac{5}{3} > \sqrt{e}$,

故 $\varphi(\frac{5}{3}) < \varphi(\sqrt{e}) = 0$,

即 $e \ln \frac{5}{3} < \frac{1}{2}(\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{18}$ 13 分

令函数 $u(x) = e \ln x - \frac{12}{25}x^2$ ($1 < x \leq \frac{5}{3}$).

求导得 $u'(x) = \frac{e}{x} - \frac{24}{25}x$,

函数 $u'(x)$ 在 $(1, \frac{5}{3})$ 上递减,

$u'(x) > u'(\frac{5}{3}) = \frac{3e}{5} - \frac{8}{5} > 0$,

函数 $u(x)$ 在 $(1, \frac{5}{3})$ 上单调递增,

$u(\frac{5}{3}) > u(\sqrt{e}) = \frac{e}{2} - \frac{12}{25}e > 0$,

因此 $e \ln \frac{5}{3} - \frac{12}{9} > 0$, 即 $e \ln \frac{5}{3} > \frac{24}{18}$ 16 分

从而 $\frac{24}{18} < e \ln \frac{5}{3} < \frac{25}{18}$,

即 $\frac{24}{18e} < \ln \frac{5}{3} < \frac{25}{18e}$

又正整数 n 满足不等式 $\frac{n}{18e} < \ln \frac{5}{3} < \frac{n+1}{18e}$,

则 $n = 24$ 17 分