2024～2025 学年高二教学质量检测

数学参考答案及评分标准

一、单项选择题(每小题 5 分,共 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	C	A	A	B

二、多项选择题(每小题 6 分,共 18 分)

9. ACD　　10. ABD　　11. BC

三、填空题(每小题 5 分,共 15 分)

12. 30　　13. $2\sqrt{3}$　　14. 56

四、解答题(共 77 分)

15. (13 分)

解:(1)函数 $f(x)=(x-2)e^x$,则 $f'(x)=(x-1)e^x$. ………………………… 2 分

令 $f'(x)=0$,解得 $x=1$. ………………………… 3 分

当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表:

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	$-e$	单调递增

………………………… 5 分

当 $x=1$ 时,$f(x)$有极小值且极小值为 $f(1)=-e$. ………………………… 6 分

(2)令 $f(x)=0$,解得 $x=2$.

当 $x<2$ 时,$f(x)<0$;当 $x>2$ 时,$f(x)>0$.

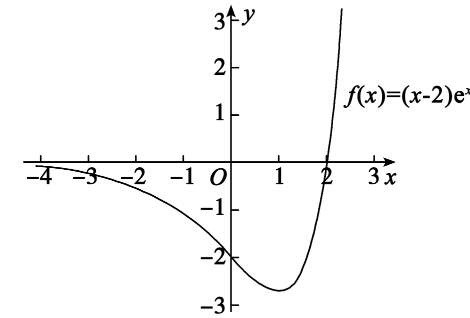
所以函数 $f(x)$的图象经过特殊点 $A(0,-2)$,$B(1,-e)$,$C(2,0)$. ………………………… 9 分

当 $x\to-\infty$时,与一次函数相比,指数函数 $y=e^{-x}$ 呈爆炸性增长,

从而 $f(x)=\dfrac{x-2}{e^{-x}}\to 0$, ………………………… 10 分

当 $x\to+\infty$时,$f(x)\to+\infty$,$f'(x)\to+\infty$. ………………………… 11 分

根据以上信息,函数 $f(x)$的大致图象为:



………………………… 13 分

16. (15 分)

解:(1)$\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式的通项为:

$T_{r+1}=C_n^r x^{\frac{n-r}{3}}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^r x^{-\frac{r}{3}}=C_n^r\left(-\dfrac{1}{2}\right)^r x^{\frac{n-2r}{3}}$,$0\leqslant r\leqslant n$,$r\in\mathbf{Z}$. ………………………… 3 分

因为第 6 项为常数项,

所以 $r=5$ 时,有$\dfrac{n-2r}{3}=0$,

解得 $n=10$. ………………………… 5 分

令$\dfrac{10-2r}{3}=2$,得 $r=\dfrac{1}{2}\times(10-6)=2$,

所以含 x^2 的项的系数为 $C_{10}^2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{45}{4}$. ………………………… 7 分

(2)根据题意得$\begin{cases}\dfrac{10-2r}{3}\in\mathbf{Z},\\ 0\leqslant r\leqslant 10\end{cases}$

令$\dfrac{10-2r}{3}=k(k\in\mathbf{Z})$,则 $r=5-\dfrac{3}{2}k$,$r\in\mathbf{Z}$. ………………………… 9 分

所以 k 应为偶数. 又 $0\leqslant r\leqslant 10$,

所以 k 取 2,0,-2,即 r 取 2,5,8,

所以第 3 项,第 6 项与第 9 项为有理项. ………………………… 11 分

它们分别为 $C_{10}^2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2x^2$,$C_{10}^5\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5$,$C_{10}^8\left(-\dfrac{1}{2}\right)^8x^{-2}$,

即$\dfrac{45}{4}x^2$,$-\dfrac{63}{8}$,$\dfrac{45}{256x^2}$. ………………………… 15 分

17.(15 分)

解:(1)零假设为 H_0:满意度与学生的组别相互独立,即满意度与学生组别无关.

由 2×2 列联表得:

$\chi^2=\dfrac{400(80\times70-120\times130)^2}{210\times190\times200\times200}=\dfrac{10000}{399}\approx25.063$ ………………………………………… 3 分

>10.828, ……………………………………………………………………………… 4 分

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的 χ^2 独立性检验,我们推断 H_0 不成立,

即认为满意度与学生的组别不独立,该推断犯错误的概率不超过 0.001. ………… 6 分

(2)高考学生游客共有 200 人,其中满意的有 120 人,不满意的有 80 人,

按照分层抽样,其中抽得满意的有 3 人,不满意的有 2 人, ……………………… 7 分

由题意,X 的可能取值为 1,2,3, ……………………………………………………… 8 分

则 $P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$,$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$,$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$, ………… 11 分

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

$E(X)=1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{5}$, ………………………………………… 13 分

$D(X)=\dfrac{3}{10}\times(1-\dfrac{9}{5})^2+\dfrac{3}{5}\times(2-\dfrac{9}{5})^2+\dfrac{1}{10}\times(3-\dfrac{9}{5})^2=\dfrac{9}{25}$. ………………… 15 分

18.(17 分)

解:(1)由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

当 $a=1$ 时,$f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{x}-1$,则 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{x^2}$. ………………………… 2 分

所以 $f'(1)=0$,又 $f(1)=0$,

所以所求切线方程为 $y=0$. …………………………………………………………… 4 分

(2)方法一 因为 $f(x)\geqslant0$ 恒成立,

所以 $f(1)=a-1\geqslant0$,$a\geqslant1$. ……………………………………………………… 6 分

当 $a\geqslant1$ 时,$f'(x)=\ln x-\dfrac{a}{x^2}+a$,令 $g(x)=f'(x)$,

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{x^2+2a}{x^3}$.

所以 $g'(x)>0$,即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………… 8 分

因为 $f'(1)=0$,

所以当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)\geqslant f(1)=a-1\geqslant0$ 恒成立

综上 $a\in[1,+\infty)$. ……………………………………………………………………… 9 分

方法二 由题意得 $f'(x)=\ln x-\dfrac{a}{x^2}+a$,$x>0$,

令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2a}{x^3}=\dfrac{x^2+2a}{x^3}$.

若 $a\geqslant0$,则 $g'(x)>0$,即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… 5 分

因为 $f'(1)=0$,

所以当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

即 $f(x)\geqslant f(1)=a-1$,

由 $f(x)\geqslant0$,得 $a-1\geqslant0$,即 $a\geqslant1$. ……………………………………………… 7 分

若 $a<0$,由 $f(x)\geqslant0$,可得 $x\ln x+a(\dfrac{1}{x}-1)+(a-1)x\geqslant0$,

即 $a(x+\dfrac{1}{x}-1)\geqslant x-x\ln x$,对任意 $x>0$ 恒成立,

因为 $x+\dfrac{1}{x}-1\geqslant2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-1=1>0$,

而 $y=x-x\ln x$,当 $x=1$ 时,$y=1$,

所以对 $a<0$ 时,$a(x+\dfrac{1}{x}-1)\geqslant x-x\ln x$ 不成立,

即当 $a<0$ 时,$f(x)\geqslant0$ 不恒成立;

综上可知:$a\in[1,+\infty)$. ……………………………………………………………… 9 分

(3)令 $h(x)=e^{x-1}-x$,则 $h'(x)=e^{x-1}-1$,

由 $h'(x)<0$,得 $x<1$,由 $h'(x)>0$,得 $x>1$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

则 $h(x)\geqslant h(1)=0$,所以 $e^{x-1}\geqslant x$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立.① ……………… 11 分

令 $t(x)=\ln x+1-x$,则 $t'(x)=\dfrac{1}{x}-1$,

由 $t'(x)<0$,得 $x>1$,由 $t'(x)>0$,得 $0<x<1$,

所以 $t(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,

则 $t(x)\leqslant t(1)=0$,所以 $\ln x+1\leqslant x$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立.② …………… 13 分

当 $a=1$ 时,$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x^2}$,

由②得 $\ln x+1-\frac{1}{x^2}\leqslant x-\frac{1}{x^2}$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

由①得 $e^{x-1}+2x-3\geqslant x+2x-3=3(x-1)$,当且仅当 $x=1$ 时等号成立.

令 $\varphi(x)=x-\frac{1}{x^2}-3(x-1)=3-\frac{1}{x^2}-2x=\frac{-2x^3+3x^2-1}{x^2}$,$x>0$. …………… 14 分

令 $\mu(x)=-2x^3+3x^2-1$,则 $\mu'(x)=-6x^2+6x$,$x>0$

由 $\mu'(x)<0$,得 $x>1$,由 $\mu'(x)>0$,得 $0<x<1$,

所以 $\mu(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,

所以 $\mu(x)\leqslant\mu(1)=0$. …………………………………………………… 15 分

所以 $\varphi(x)\leqslant 0$,所以 $x-\frac{1}{x^2}\leqslant 3(x-1)$. …………………………………… 16 分

综上可知,$f'(x)\leqslant x-\frac{1}{x^2}\leqslant 3(x-1)\leqslant e^{x-1}+2x-3$,

当且仅当 $x=1$ 时等号同时成立,

所以 $f'(x)\leqslant e^{x-1}+2x-3$. ……………………………………………… 17 分

19.(17 分)

解:(1)由题意知,质点应向右移动 3 次,向上移动 3 次. ……………………………… 1 分

设 A 表示事件"质点移动 6 次后位于(3,3)",

则 $P(A)=C_6^3\times(\frac{1}{4})^3\times(\frac{1}{4})^3=\frac{5}{1024}$. ………………………………………… 4 分

(2)质点第 2 秒末可能运动到点$(-1,1)$,$(1,1)$,$(1,-1)$,$(-1,-1)$;$(0,2)$,$(2,0)$,$(0,-2)$,$(-2,0)$;$(0,0)$.

故 X 的可能取值为$-1,0,1$. ……………………………………………………… 5 分

当质点位于$(-1,1)$,$(1,1)$,$(1,-1)$,$(-1,-1)$时,每个位置有两种移动情形;位于$(0,2)$,$(2,0)$,$(0,-2)$,$(-2,0)$时,每个位置有一种移动情形;位于$(0,0)$时,有 4 种移动情形,共计 16 种. …………………………………………………………… 6 分

且 $P(X=-1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$,$P(X=0)=\frac{4\times 2}{16}=\frac{1}{2}$,$P(X=1)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, ………… 9 分

故 X 的分布列为:

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

所以 $E(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{4}=0$. ………………………………… 10 分

(3)质点在第 n 秒末要回到原点,则 n 次移动中左右方向移动次数相同,且上下方向移动次数相同.

(i)质点在第 2 秒末回到原点,则有两种可能:左右方向移动各 1 次,上下方向移动 0 次或者左右方向移动 0 次,上下方向移动各 1 次.

故 $p_2=\frac{C_2^1\cdot C_1^1+C_2^1\cdot C_1^1}{4^2}=\frac{1}{4}$; ……………………………………………… 11 分

质点在第 4 秒末回到原点,则有三种可能:左右方向移动各 2 次,上下方向移动 0 次或者左右方向移动各 1 次,上下方向移动各 1 次或者左右方向移动 0 次,上下方向移动各 2 次.

故 $p_4=\frac{C_4^2\cdot C_2^2+A_4^4+C_4^2\cdot C_2^2}{4^4}=\frac{9}{64}$; ……………………………………… 13 分

(ii)设质点在 $2n$ 次移动中向左移动了 k 步$(k=0,1,2,\cdots,n)$,则其向右移动了 k 步,向上移动了 $n-k$ 步,向下移动了 $n-k$ 步.

$$p_{2n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{2n}^{k}\cdot C_{2n-k}^{k}\cdot C_{2n-2k}^{n-k}\cdot C_{n-k}^{n-k}}{4^{2n}}\quad\text{…… 14 分}$$

$$=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(2n)!}{k!\cdot(2n-k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{k!\cdot(2n-2k)!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\cdot(n-k)!}\right]$$

$$=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(k!)^2\cdot[(n-k)!]^2}\quad\text{…… 15 分}$$

$$=\frac{1}{4^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{(k!)^2[(n-k)!]^2}$$

$$=\frac{1}{4^{2n}}\cdot C_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2$$

$$=\frac{1}{4^{2n}}\cdot(C_{2n}^{n})^2$$

$$=\frac{1}{16^n}\cdot\frac{[(2n)!]^2}{(n!)^4}.\quad\text{…… 17 分}$$