# 2025年高考模拟考试

# 数学试题

2025.04

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid y=\lg(x-1)\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $[-1,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(1,2]$　　D. $[-1,+\infty)$

2. 已知 $1-2i$ 是关于 $x$ 的方程 $x^2+ax+b=0(a,b\in\mathbf{R})$ 的一个根，则 $|a+bi|=$

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. $\sqrt{29}$

3. 已知圆锥的体积为 $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$，其侧面展开图是一个圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的扇形，则该圆锥的底面半径为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

4. 若函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-ax}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，则实数 $a$ 的取值范围是

A. $a\leqslant 2$　　B. $a\geqslant 2$　　C. $a\leqslant 1$　　D. $a\geqslant 1$

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1=1$，则“$a_5=2$”是“$a_9=4$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x+\sqrt{3}(\omega>0)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有且仅有3个零点，则实数 $\omega$ 的取值范围是

A. $[\frac{14}{3},\frac{20}{3})$　　B. $[4,\frac{16}{3})$　　C. $[4,\frac{22}{3}]$　　D. $[4,\frac{22}{3})$

7. 若圆 $x^2+y^2-2ax-2y-1=0$ 关于直线 $x+by-2=0$ 对称，其中 $a>0,b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{4a+1}{b}$ 的最小值为

A. 2　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 4　　D. $2+2\sqrt{5}$

8. 已知 $F$ 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，直线 $y=\frac{4}{3}x$ 交 $C$ 于 $A,B$ 两点，若 $AF\perp BF$，则椭圆 $C$ 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分。**

9. 已知 $A,B$ 为随机事件，且 $P(A)=0.5,P(B)=0.4$，则下列结论正确的是

A. 若 $A,B$ 互斥，则 $P(A\cup B)=0.9$

B. 若 $A,B$ 相互独立，则 $P(A\overline{B})=0.2$

C. 若 $A,B$ 相互独立，则 $P(A\cup B)=0.7$

D. 若 $P(B|A)=0.5$，则 $P(B|\overline{A})=0.3$

10. 已知函数 $f(x)=\cos x-\sin(\cos x)-1$，则下列结论正确的是

A. $f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称

B. $2\pi$ 是 $f(x)$ 的一个周期

C. $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上为增函数

D. $f(x)<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

11. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 $P$ 在正方体的内切球表面上运动，且满足 $BP//$平面 $ACD_1$，则下列结论正确的是

A. $BP\perp B_1D$

B. 点 $P$ 的轨迹长度为 $\pi$

C. 线段 $BP$ 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

D. $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC_1}$ 的最小值为 $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。**

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}4^x+1, x\leqslant 1,\\ -\log_2(x+1), x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(\frac{1}{2}))$的值为____▲____.

13.已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 $F$,$P$ 为 $C$ 上的动点,点 $A(1,-1)$,则$\frac{|PF|}{|PA|}$取最小值时,直线 $PA$ 的斜率为____▲____.

14.箱子中装有 4 个红球,2 个黄球(除颜色外完全相同),掷一枚质地均匀的骰子 1 次,如果点数为 $i(i=1,2,3,4,5,6)$,则从该箱子中一次性取出 $i$ 个球.规定:依据 $i$ 个球中红球的个数,判定甲的得分 $X$,每一个红球记 1 分;依据 $i$ 个球中黄球的个数,判定乙的得分 $Y$,每一个黄球记 2 分.比如:若一次性取出了 2 个红球,2 个黄球,则判定甲得分 $X=2$,乙得分 $Y=4$.则在 1 次掷骰子取球的游戏中,$P(X>Y)=$____▲____.

**四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。**

15.(13 分)

在$\triangle ABC$ 中,内角 $A,B,C$ 所对的边分别为 $a,b,c$,且 $a(2-\cos B)=b(1+\cos A)$.

(1)证明:$b+c=2a$;

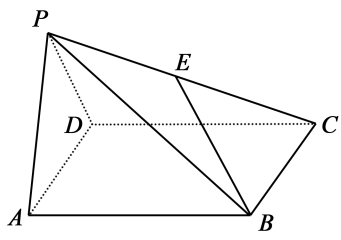
(2)若$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}bc$,证明$\triangle ABC$ 为等边三角形.

16.(15 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,$E$ 为 $PC$ 的中点,$PA=AD$,$PD\perp BE$.

(1)证明:平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$;

(2)若 $PD=AD$,直线 $PB$ 与平面 $PDA$ 所成角的正切值等于 2,求平面 $ABE$ 与平面 $PBC$ 夹角的余弦值.




17.(15 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{7}}{2}$,且点 $A(4,3)$在双曲线 $C$ 上,

(1)求 $C$ 的方程;

(2)若直线 $l$ 交 $C$ 于 $P,Q$ 两点,$\angle PAQ$ 的平分线与 $x$ 轴垂直,求证:$l$ 的倾斜角为定值.

18.(17 分)

已知函数 $f(x)=xe^x-a$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)讨论 $f(x)$零点的个数;

(2)若$|f(x)|>ax(\ln x+1)$,求实数 $a$ 的取值范围.

19.(17 分)

将所有正整数按照如下规律形成数阵:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 第 1 行 | 1 | 2 | 3 | …… | 7 | 8 | 9 |
| 第 2 行 | 10 | 11 | 12 | …… | 97 | 98 | 99 |
| 第 3 行 | 100 | 101 | 102 | …… | 997 | 998 | 999 |
| 第 4 行 | 1000 | 1001 | 1002 | …… | 9997 | 9998 | 9999 |
| | ………… | | | | | | |

(1)将数列$\{3n+1\}$与数列$\{2^n\}$的公共项按照从小到大的顺序排列得到数列$\{a_n\}$,试确定 $a_6$ 在该数阵中的位置;

(2)将数阵中所有相邻两位数字(从左到右)出现 12 的所有正整数去掉并保持顺序不变,得到一个新数阵,记新数阵第 $n$ 行中正整数的个数为 $b_n$.

(ⅰ)求 $b_1,b_2,b_3$;

(ⅱ)求 $b_n$.

# 2025 年高考模拟考试

# 数学试题参考答案

2025.04

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。**

1.C　2.D　3.B　4.A　5.C　6.D　7.C　8.A

**二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。**

9.ACD　10.ABD　11.ACD

**三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。**

13. $-2$　14. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　15. $\dfrac{11}{30}$

**四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。**

15.(1)证明：由正弦定理得 $\sin A(2-\cos B)=\sin B(1+\cos A)$，……………… 2 分

即 $2\sin A-\sin A\cos B=\sin B+\sin B\cos A$，

所以 $2\sin A=\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $2\sin A=\sin B+\sin C$，……………… 4 分

由正弦定理得 $2a=b+c$. ……………… 6 分

(2)证明：因为 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，……………… 8 分

因为 $2a=b+c$，所以 $A$ 为锐角，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……………… 9 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-bc$，……………… 10 分

又 $a=\dfrac{b+c}{2}$，代入化简得 $b=c$，……………… 12 分

所以 $a=b=c$，

所以$\triangle ABC$ 为等边三角形. ……………… 13 分

16.(1)证明：设 $F$ 为 $PD$ 的中点，连接 $AF$，$EF$，

因为 $E$ 为 $PC$ 的中点，所以 $EF//CD$，$EF=\dfrac{1}{2}CD$，

又 $AB//CD$，$AB=CD$，所以 $EF//AB$，$EF=\dfrac{1}{2}AB$，

所以 $AF$ 与 $BE$ 必相交. ……………… 2 分

因为 $PA=AD$，所以 $AF\perp PD$，

又 $PD\perp BE$，所以 $PD\perp$ 平面 $ABEF$，……………… 3 分

所以 $PD\perp AB$，……………… 4 分

又 $AD\perp AB$，$PD\cap AD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 $PAD$， …………………………………………… 5 分

又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$. ……………………………………… 6 分

(2)解：设 $O$，$G$ 分别为 $AD$，$BC$ 的中点，因为 $PA=AD=PD$，所以 $PO\perp AD$，

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp OA$，$PO\perp OG$，又 $OA\perp OG$，

所以，以 $O$ 为坐标原点，$OA$，$OG$，$OP$ 所在直线分别为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴，

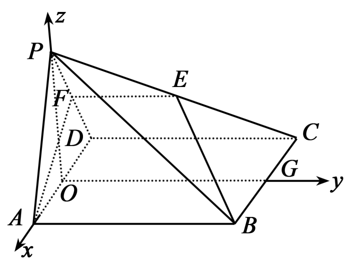
建立空间直角坐标系. ………………………………………………………………………… 8 分

由(1)知 $AB\perp$ 平面 $PAD$，所以 $\angle APB$ 即为直线 $PB$ 与平面 $PDA$ 所成的角， ……… 9 分

所以 $\tan\angle APB=\dfrac{AB}{AP}=2$，设 $AP=2$，则 $AB=4$，

所以 $A(1,0,0)$，$B(1,4,0)$，$C(-1,4,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$. ……………………… 10 分

因为 $PD\perp$ 平面 $ABEF$，所以平面 $ABE$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{PD}=(-1,0,-\sqrt{3})$. …… 11 分




设平面 $PBC$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

又 $\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{PB}=(1,4,-\sqrt{3})$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=x+4y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

取 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},4)$， ……………………………………………… 13 分

所以平面 $ABE$ 与平面 $PBC$ 夹角的余弦值为

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4\sqrt{3}}{2\times\sqrt{19}}=\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$. ………………………………………… 15 分

17.(1)解：由题意得

$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}\\ \dfrac{16}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$ ………………………………………………………………………… 3 分

解得 $a^2=4$，$b^2=3$

所以 $C$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………… 4 分

(2)证明：由题意知 $l$ 的斜率必存在，设 $l$：$y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-12=0$， …………………………… 5 分

所以 $x_1+x_2=\dfrac{8km}{3-4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4m^2-12}{3-4k^2}$. ………………………………………… 7 分

因为$\angle PAQ$的平分线与 $x$ 轴垂直，所以 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1-3}{x_1-4}+\dfrac{y_2-3}{x_2-4}=0$，……………… 9 分

即$(x_2-4)(y_1-3)+(x_1-4)(y_2-3)=0$，

亦即$(x_2-4)(kx_1+m-3)+(x_1-4)(kx_2+m-3)=0$，

展开得 $2kx_1x_2+(m-4k-3)(x_1+x_2)-8(m-3)=0$，………………………………… 11 分

所以 $2k\times\dfrac{-4m^2-12}{3-4k^2}+(m-4k-3)\times\dfrac{8km}{3-4k^2}-8(m-3)=0$，

化简得$(k+1)(4k+m-3)=0$. ………………………………………………………… 13 分

由题意知直线 $l: y=kx+m$ 不过点 $A(4,3)$，所以 $4k+m-3\neq0$，

所以 $k=-1$，故 $l$ 的倾斜角为定值$\dfrac{3\pi}{4}$. ……………………………………………… 15 分

18. 解：(1) $f(x)=0$ 时，$a=xe^x$

令 $g(x)=xe^x$，则 $g'(x)=(x+1)e^x$ ……………………………………………… 1 分

所以，$x<-1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，$x>-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增 … 2 分

又 $x<0$ 时，$g(x)<0$，$x\to-\infty$时，$g(x)\to0$；$x=-1$ 时，$g(x)=-\dfrac{1}{e}$，

$x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$ ………………………………………………………… 3 分

所以，①当 $a<-\dfrac{1}{e}$时，$f(x)$无零点 ………………………………………………… 4 分

②$a=-\dfrac{1}{e}$或 $a\geqslant0$ 时，$f(x)$有 1 个零点 ……………………………………… 5 分

③当$-\dfrac{1}{e}<a<0$ 时，$f(x)$有 2 个零点 ……………………………………………… 6 分

(2) 当 $a\leqslant0$ 时，由 $x>0$ 得 $f(x)>0$

所以，$|f(x)|>ax(\ln x+1)$等价于 $xe^x-a>ax(\ln x+1)$对 $x\in(0,+\infty)$恒成立 …… 7 分

即，$e^x>a(\ln x+\dfrac{1}{x}+1)$对 $x\in(0,+\infty)$恒成立 ……………………………… 8 分

令 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1$，$x>0$，则 $h'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

$\therefore h(x)$在$(0,1)$内单调递减，在$(1,+\infty)$内单调递增

$\therefore h(x)\geqslant h(1)=2$，又 $e^x>0$ ……………………………………………… 9 分

$\therefore e^x>a(\ln x+\dfrac{1}{x}+1)$对 $x\in(0,+\infty)$恒成立

所以，$a\leqslant0$ 时成立 ………………………………………………………………… 10 分

当 $a>0$，$x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$ax(\ln x+1)<0$，显然成立.

当 $a>0$，$x\in[\frac{1}{e},+\infty)$ 时，

$|f(x)|>ax(\ln x+1)$ 等价于 $xe^x-a>ax(\ln x+1)$ 或 $xe^x-a<-ax(\ln x+1)$

即 $\frac{e^x}{a}>\ln x+\frac{1}{x}+1$ 或 $\frac{e^x}{a}<-\ln x+\frac{1}{x}-1$ …………………………………………… 11 分

对于，$\frac{e^x}{a}<-\ln x+\frac{1}{x}-1$，取 $x=1$，得 $\frac{e}{a}<0$，与 $a>0$ 矛盾，故不成立 ………………… 13 分

对于 $\frac{e^x}{a}>\ln x+\frac{1}{x}+1$，即 $\frac{1}{a}>\frac{\ln x+\frac{1}{x}+1}{e^x}$，对 $x\in[\frac{1}{e},+\infty)$ 恒成立 ………………… 14 分

令 $t(x)=\frac{\ln x+\frac{1}{x}+1}{e^x}$，$x\in[\frac{1}{e},+\infty)$，则 $t'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}-\ln x-1}{e^x}<0$ ………………… 15 分

$\therefore t(x)$ 在 $[\frac{1}{e},+\infty)$ 内单调递减

$\therefore t(x)\leqslant t(\frac{1}{e})=e^{1-\frac{1}{e}}$

所以，$0<a<e^{\frac{1}{e}-1}$ ………………………………………………………………………… 16 分

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,e^{\frac{1}{e}-1})$ ………………………………………………………… 17 分

19. 解：(1) 设 $3m+1=2^n$，………………………………………………………………………… 1 分

因为，$2^n=(3-1)^n$

$$=C_n^0\cdot3^n+C_n^1\cdot3^{n-1}\cdot(-1)+C_n^2\cdot3^{n-2}\cdot(-1)^2+\cdots+C_n^{n-1}\cdot3\cdot(-1)^{n-1}+C_n^n\cdot(-1)^n,$$

所以，$m=\frac{C_n^0\cdot3^n+C_n^1\cdot3^{n-1}\cdot(-1)+C_n^2\cdot3^{n-2}\cdot(-1)^2+\cdots+C_n^{n-1}\cdot3\cdot(-1)^{n-1}+C_n^n\cdot(-1)^n-1}{3}$，

………………………………………………………………………………………………………… 3 分

所以，当且仅当 $n$ 为偶数时，$m$ 可以取得正整数，

所以，当且仅当 $n$ 为偶数时，数列有公共项，

所以，$a_n=2^{2n}$，故 $a_6=2^{12}=4096$，………………………………………………………… 4 分

所以，$a_6$ 是数阵第 4 行，第 97 个数. …………………………………………………………… 5 分

(2)(ⅰ) 当 $n=1$ 时，显然 $b_1=9$. ……………………………………………………………… 6 分

当 $n=2$ 时，第 2 行 2 位数有 90 个，其中只有 12 去掉. 故 $b_2=9\times10-1=89$. ………… 7 分

当 $n=3$ 时，第 3 行 3 位数有 900 个，其中有两种情况去掉：

百位和十位分别为 12，此时有 10 个；十位和个位分别为 12，此时有 9 个.

故 $b_3=900-19=881$. …………………………………………………………………… 9 分

(ⅱ)当 $n>2$ 时,将第 $n+1$ 行 $b_{n+1}$ 个符合条件的 $n+1$ 位正整数分为两类:

①个位数字不等于 2 时,个位数字有 9 种取法,前面 $n$ 位数有 $b_n$ 种取法,这时 $n+1$ 位正整数中有 $9b_n$ 个; …………………………………………………………………… 10 分

②个位数字等于 2 时,前面 $n$ 位数有 $b_n$ 种取法,但这 $b_n$ 个 $n+1$ 位正整数中十位数字等于 1 的 $b_{n-1}$ 个正整数要去掉.故个位数字等于 2 且十位数字不等于 1 的 $n+1$ 位正整数有 $b_n-b_{n-1}$ 个. …………………………………………………………………… 11 分

综上,由加法原理知 $b_{n+1}=10b_n-b_{n-1}$. …………………………………………… 12 分

设 $b_{n+1}-xb_n=(10-x)\left(b_n-\dfrac{1}{10-x}b_{n-1}\right)$,

所以,$x=\dfrac{1}{10-x}$,即 $x^2-10x+1=0$,

解得 $x=5\pm2\sqrt{6}$, …………………………………………………………………… 13 分

所以,$\{b_{n+1}-(5+2\sqrt{6})b_n\}$ 是首项为 $b_2-(5+2\sqrt{6})b_1=44-18\sqrt{6}$,公比为 $5-2\sqrt{6}$ 的等比数列;

$\{b_{n+1}-(5-2\sqrt{6})b_n\}$ 是首项为 $b_2-(5-2\sqrt{6})b_1=44+18\sqrt{6}$,公比为 $5+2\sqrt{6}$ 的等比数列;

所以,$b_{n+1}-(5+2\sqrt{6})b_n=(44-18\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})^{n-1}$,

$b_{n+1}-(5-2\sqrt{6})b_n=(44+18\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})^{n-1}$,

所以,当 $n>2$ 时,$b_n=\dfrac{(11\sqrt{6}+27)(5+2\sqrt{6})^{n-1}-(11\sqrt{6}-27)(5-2\sqrt{6})^{n-1}}{6}$,……… 15 分

经检验,当 $n=1$ 时,$b_1=9$ 也成立

当 $n=2$ 时,$b_2=89$ 也成立. …………………………………………………………… 16 分

综上,$b_n=\dfrac{(11\sqrt{6}+27)(5+2\sqrt{6})^{n-1}-(11\sqrt{6}-27)(5-2\sqrt{6})^{n-1}}{6}$. …………………… 17 分