2025 届高三模拟考试

数学参考答案及评分标准

2025.03

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1—4. A C D B　　5—8. B D C C

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. ABD　　10. ACD　　11. AD

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. $y^2=20x$　　13. $(1,2)$　　14. $\frac{3}{16}$

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解:(1)**方法一**　因为 $a_{n+1}=a_n+2^n-2$,所以 $a_{n+1}-a_n=2^n-2$,

则当 $n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*$ 时,$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}-2,a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}-2,\cdots,a_2-a_1=2-2$,

累加得,$a_n-a_1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2-2(n-1)=\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-2(n-1)=2^n-2n$,

………………………………………… 5 分

所以 $a_n=2^n-2n+20,n\geqslant2$. ………………………… 6 分

又 $a_1=20$,也满足上式.

所以 $a_n=2^n-2n+20$. ………………………… 7 分

方法二　因为 $a_{n+1}=a_n+2^n-2$,所以 $a_{n+1}-2^{n+1}=a_n-2^n-2$,

所以 $(a_{n+1}-2^{n+1})-(a_n-2^n)=-2$. ………………………… 3 分

因为 $a_1=20$,所以 $a_1-2=18$,

所以数列 $\{a_n-2^n\}$ 是首项为 18,公差为 -2 的等差数列. ………………………… 5 分

所以 $a_n-2^n=18+(n-1)\times(-2)=20-2n$,

故 $a_n=2^n+20-2n$. ………………………… 7 分

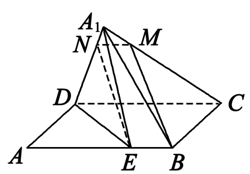
(2)由(1)知 $b_n=a_n-2^n=20-2n$, ………………………… 8 分

则 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=20n-2(1+2+3+\cdots+n)$

$=20n-2\times\frac{(1+n)n}{2}=-n^2+19n=-(n-\frac{19}{2})^2+\frac{361}{4}$, ………………………… 11 分

所以当 n 取 9 或 10 时,S_n 最大,且 $S_{10}=S_9=-(9-\frac{19}{2})^2+\frac{361}{4}=90$. ………… 13 分

16. 解:(1)**方法一**　在线段 A_1D 上取点 N,使得 $DN=2NA_1$,连接 MN,EN. ……… 1 分



因为 $CM=2MA_1$,

所以 $MN/\!/CD$ 且 $MN=\frac{1}{3}CD$

又 $DC/\!/EB$,

所以 $MN/\!/EB$. ………………………… 3 分

$AE=2EB,EB=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{3}DC$,

所以 $MN=EB$, ………………………… 4 分

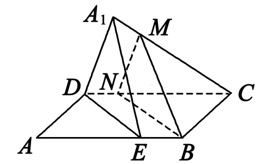
所以四边形 $MNEB$ 是平行四边形.

所以 $BM/\!/EN$. ………………………… 5 分

又 $EN\subset$ 平面 A_1DE,$BM\not\subset$ 平面 A_1DE,

所以 $BM/\!/$ 平面 A_1DE. ………………………… 6 分

方法二　在线段 CD 上取点 N,使得 $CN=2ND$,连接 MN,BN. ……… 1 分



因为 $CM=2MA_1$,$CN=2ND$

所以 $MN/\!/A_1D$. ………………………… 2 分

因为 $MN\not\subset$ 面 A_1DE,$A_1D\subset$ 面 A_1DE,

所以 $MN/\!/$ 面 A_1DE. ………………………… 3 分

又因为 $AE=2EB$,

所以 $DN/\!/EB$ 且 $DN=EB$.

所以四边形 $EBND$ 是平行四边形.

所以 $BN/\!/DE$.

又 $DE\subset$ 平面 A_1DE,$BN\not\subset$ 平面 A_1DE,

所以 $BN/\!/$ 平面 A_1DE. ………………………… 4 分

又 $BN\subset$ 平面 BMN,$MN\subset$ 平面 BMN,$BN\cap MN=N$

所以平面 $A_1DE/\!/$ 平面 BMN, ………………………… 5 分

又 $BM\subset$ 平面 BMN,

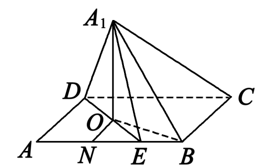
所以 $BM/\!/$ 平面 A_1DE. ………………………… 6 分

(2)取 DE 中点 O,连接 OA,OA_1,因为 $A_1D=A_1E=2$

则 $OA_1\perp DE$,又平面 $A_1DE\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $A_1DE\cap$ 平面 $ABCD=DE$,$OA_1\subset$ 平面 A_1DE,

所以 $OA_1\perp$ 平面 $ABCD$. ………………………… 7 分

方法一　连接 OB,$OB\subset$ 平面 $ABCD$,



所以 $OA_1\perp OB$.

取 AE 中点 N,连接 ON

所以 $OB=\sqrt{ON^2+NB^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. ………… 8 分

$A_1B=\sqrt{A_1O^2+OB^2}=\sqrt{7}$. ………… 9 分

在 $\triangle A_1EB$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle A_1EB=\frac{EA_1{}^2+EB^2-A_1B^2}{2EA_1\cdot EB}=\frac{2^2+1^2-7}{2\times2\times1}=-\frac{1}{2}$. ………… 10 分

又 $\angle A_1EB\in(0,\pi)$,所以 $\angle A_1EB=\frac{2\pi}{3}$. ………… 11 分

所以 $S_{\triangle A_1EB}=\frac{1}{2}EB\cdot EA_1\cdot\sin\angle A_1EB=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ………… 12 分

又因为 $S_{\triangle DEB}=\frac{1}{2}EB\cdot AD=1$ ………… 13 分

设点 D 到平面 A_1BE 的距离为 h,又 $V_{D-A_1BE}=V_{A_1-BDE}$,

所以$\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1EB}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BDE}\cdot A_1O$

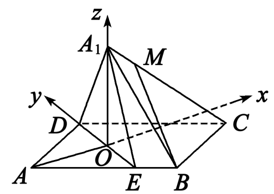
所以$h=\frac{S_{\triangle BDE}\cdot A_1O}{S_{\triangle A_1EB}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………… 15分

方法二 因为平面$A_1DE\perp$平面$ABCD$

所以$OA_1\perp AO$,$OA_1\perp DE$,

又$AD=AE=2$,故$OA\perp DE$. ………………………………………… 8分

以O为原点建立如图所示的空间直角坐标系,



则$O(0,0,0)$,$D(0,\sqrt{2},0)$,

$A_1(0,0,\sqrt{2})$,$E(0,-\sqrt{2},0)$,$B(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$,

所以$\overrightarrow{EB}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$,

$\overrightarrow{EA_1}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$,$\overrightarrow{ED}=(0,2\sqrt{2},0)$. ………………………………………… 10分

设平面A_1BE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA_1}=\sqrt{2}y+\sqrt{2}z=0\end{cases}$, ………………………………………… 11分

令$x=1$,得$y=1$,$z=-1$,所以$\boldsymbol{n}=(1,1,-1)$. ………………………………………… 13分

所以点D到平面A_1BE的距离为$d=\frac{|\overrightarrow{ED}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………………… 15分

17. 解:(1)记得n分的概率为p_n,得3分共有两种可能.

第一种是抛掷两次,一次偶数点,一次奇数点,第二种是抛掷三次都是奇数点.

所以$p_3=C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$. ………………………………………… 4分

(2)**方法一** 由题意可知,X_n的所有可能取值为$n,n+1,n+2,\cdots,n+k,\cdots,2n$.

$P(X_n=n+k)=C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^k\cdot(1-\frac{1}{2})^{n-k}=C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^n$ $(0\leqslant k\leqslant n,n\in\mathbf{N}^*)$

故X_n的分布列如下

X_n	n	$n+1$	$\cdots$	$n+k$	$\cdots$	$2n$
P	$C_n^0\cdot(\frac{1}{2})^n$	$C_n^1\cdot(\frac{1}{2})^n$	$\cdots$	$C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^n$	$\cdots$	$C_n^n\cdot(\frac{1}{2})^n$

………………………………………… 8分

所以$E(X_n)=nC_n^0\cdot(\frac{1}{2})^n+(n+1)C_n^1\cdot(\frac{1}{2})^n+\cdots+(n+k)C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^n+\cdots+2nC_n^n\cdot(\frac{1}{2})^n$

$=(\frac{1}{2})^n\cdot[n(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n)+(C_n^1+2C_n^2+\cdots+kC_n^k+\cdots+nC_n^n)]$

………………………………………… 10分

又由$kC_n^k=k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$

$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$,$C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^k+\cdots+C_{n-1}^{n-1}=2^{n-1}$ …… 13分

$\therefore E(X_n)=(\frac{1}{2})^n\cdot[n\cdot2^n+n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1})]=(\frac{1}{2})^n\cdot(n\cdot2^n+n\cdot2^{n-1})$

$=\frac{3n}{2}$. ………………………………………… 15分

方法二 设抛掷n次,其中出现偶数点的次数为Y_n,由于每次出现偶数点的概率为$\frac{1}{2}$,

且每次抛掷结果是相互独立的,故$Y_n\sim B(n,\frac{1}{2})$,$E(Y_n)=\frac{n}{2}$. ………………………… 8分

又由$X_n=2Y_n+(n-Y_n)=n+Y_n$,从而X_n的分布列及数学期望分别如下:

$P(X_n=n+k)=P(Y_n=k)=C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^k\cdot(1-\frac{1}{2})^{n-k}$

$=C_n^k\cdot(\frac{1}{2})^n$ $(0\leqslant k\leqslant n,n\in\mathbf{N}^*)$ ………………………… 12分

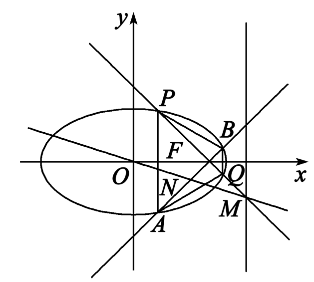
$\therefore E(X_n)=E(n+Y_n)=n+E(Y_n)=n+\frac{n}{2}=\frac{3n}{2}$. ………………………… 15分

18. 解(1)设椭圆C的半焦距为c,由已知$a+c=\sqrt{6}+2$,$a-c=\sqrt{6}-2$,

求得$a=\sqrt{6}$,$c=2$,所以$b^2=a^2-c^2=6-4=2$.

所以C的标准方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………… 4分

(2)由(1)知$F(2,0)$,



设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线l的方程为$y=k(x-2)$,

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$,

可得$(3k^2+1)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$. ………………… 5分

则$x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2+1}$,$x_1x_2=\frac{12k^2-6}{3k^2+1}$. ………………… 6分

于是有$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-4k=\frac{-4k}{3k^2+1}$. ………………………………………… 7分

因为AB的中点为N,所以$N(\frac{6k^2}{3k^2+1},\frac{-2k}{3k^2+1})$, ………………………………………… 8分

因此直线ON的斜率$k_{ON}=-\frac{1}{3k}$, ………………………………………… 9分

因为直线ON:$y=-\frac{1}{3k}x$交直线$x=3$于点M,

所以$M(3,-\frac{1}{k})$,

故直线MF的斜率为$k_{MF}=\frac{-\frac{1}{k}-0}{3-2}=-\frac{1}{k}$, ………………………………………… 10分

所以 $k_{MF}\cdot k_{AB}=-1$，

①因此直线 MF 与直线 PQ 垂直，$\angle MFA=\frac{\pi}{2}$. ………………………………………… 11 分

②$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{12k^2}{1+3k^2})^2-4\times\frac{12k^2-6}{1+3k^2}}=\frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$. ………………………… 13 分

因为 $k_{MF}\cdot k_{AB}=-1$，所以直线 MF 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-2)$，

同理可得 $|PQ|=\dfrac{2\sqrt{6}[(-\frac{1}{k})^2+1]}{3(-\frac{1}{k})^2+1}=\dfrac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3+k^2}$，……………………………… 14 分

所以四边形 $APBQ$ 的面积

$S(k)=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1}\cdot\frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3+k^2}=\frac{12(1+k^2)^2}{(3k^2+1)(3+k^2)}$. … 15 分

因为 $(3k^2+1)(3+k^2)\leqslant[\frac{(3k^2+1)+(3+k^2)}{2}]^2=4(1+k^2)^2$，

当且仅当 $3k^2+1=3+k^2$，即 $k=\pm1$ 时等号成立，

所以 $S(k)=\frac{12(1+k^2)^2}{(3k^2+1)(3+k^2)}\geqslant\frac{12(1+k^2)^2}{4(1+k^2)^2}=3$，

故四边形 $APBQ$ 面积的最小值为 3. ……………………………………………… 17 分

19. 解(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}x^2+x$，$x>0$，

所以 $f'(x)=\ln x-x+2$. ……………………………………………………… 1 分

令 $\varphi(x)=f'(x)=\ln x-x+2$，

所以 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$， …………………………………………………… 2 分

令 $\varphi'(x)>0$，可得 $0<x<1$；

令 $\varphi'(x)<0$，可得 $x>1$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，…………………………………… 3 分

又 $\varphi(e^{-2})=\ln e^{-2}-e^{-2}+2=-e^{-2}<0$，

$\varphi(1)=\ln1-1+2=1>0$，

$\varphi(4)=\ln4-4+2=2\ln2-2<0$，

所以在 $(e^{-2},1)$ 中存在唯一的 x_1 使得 $\varphi(x_1)=0$，

在 $(1,4)$ 中存在唯一的 x_2 使得 $\varphi(x_2)=0$，

所以 $f(x)$ 恰有两个极值点. …………………………………………………… 5 分

(2)由 $f(x)>ae^{x-1}+(1-a)x^2$，得 $ae^{x-1}<x\ln x-x^2+x$，

方法一 不等式可化为 $a<\frac{x\ln x-x^2+x}{e^{x-1}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ……………… 6 分

令 $h(x)=\frac{x\ln x-x^2+x}{e^{x-1}}$，$x\in(0,+\infty)$，

可得 $h'(x)=\frac{(1-x)(\ln x-x+2)}{e^{x-1}}=\frac{(1-x)\varphi(x)}{e^{x-1}}$，…………………………………… 7 分

由(1)可知函数 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在两个零点：$x_1\in(0,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$

即有 $\ln x_1-x_1+2=0$，$\ln x_2-x_2+2=0$.

又因为 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

所以当 $0<x<x_1$ 时，$\varphi(x)<0$；当 $x_1<x<1$ 时，$\varphi(x)>0$；

当 $1<x<x_2$ 时，$\varphi(x)>0$；当 $x>x_2$ 时，$\varphi(x)<0$.

又 $h'(x)=\frac{(1-x)\varphi(x)}{e^{x-1}}$，$x>0$，

所以当 $0<x<x_1$ 时，$h'(x)<0$；当 $x_1<x<1$ 时，$h'(x)>0$；

当 $1<x<x_2$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>x_2$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_1)$ 单调递减，在 $(x_1,1)$ 单调递增，

在 $(1,x_2)$ 单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 单调递增，……………………………………………… 10 分

所以 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)$ 的极小值为 $h(x_1)=\frac{x_1\ln x_1-x_1^2+x_1}{e^{x_1-1}}$，

$x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)$ 的极小值为 $h(x_2)=\frac{x_2\ln x_2-x_2^2+x_2}{e^{x_2-1}}$. …………………… 12 分

又由(1)可得 $x_1-\ln x_1=2$，$x_2-\ln x_2=2$，所以 $e^{x_1-\ln x_1}=e^2$，$e^{x_2-\ln x_2}=e^2$，

即 $\frac{e^{x_1}}{x_1}=\frac{e^{x_2}}{x_2}=e^2$，所以 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=e^{-2}$.

则有 $h(x_1)=\frac{x_1(x_1-2)-x_1^2+x_1}{e^{x_1-1}}=-\frac{x_1}{e^{x_1-1}}=-e^{-1}$，同理可得 $h(x_2)=-e^{-1}$，

所以 $h(x)_{\min}=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$，

所以 $a<-\frac{1}{e}$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{1}{e})$. ……………………………… 17 分

解法二 不等式可化为 $a<\frac{x\ln x-x^2+x}{e^{x-1}}=\frac{\ln x-x+1}{e^{x-1-\ln x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. …… 7 分

记 $t=x-1-\ln x$，$x>0$，

$t'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，$x>0$，所以 $t(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

所以 $t(x)\geqslant t(1)=0$. ……………………………………………………………… 10 分

所以 $a<\frac{\ln x-x+1}{e^{x-1-\ln x}}=\frac{-t}{e^t}$，$t\geqslant0$ 恒成立. ……………………………………… 11 分

记 $g(t)=-\frac{t}{e^t}$，$t\geqslant0$，$g'(t)=\frac{t-1}{e^t}$，$t\geqslant0$，

则 $g(t)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(t)\geqslant g(1)=-\frac{1}{e}$.

所以 $a<-\frac{1}{e}$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-\frac{1}{e})$. ……………………………… 17 分