

2025 届高三模拟考试

数学试题

2025.03

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} | x^2 - x - 6 \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{1, 2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
- 已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(1, 2)$, 则 $\frac{z-1}{z-i} =$
A. $-1+i$ B. $1-i$ C. $1+i$ D. $-1-i$
- 下列函数中,是偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是
A. $f(x) = -x^2$ B. $f(x) = |\log_2 x|$
C. $f(x) = x + \sin x$ D. $f(x) = |x| - |\frac{1}{x}|$
- 已知向量 $\boldsymbol{a} = (2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, m)$, 则
A. $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ 的充要条件是 $m = 2$
B. $\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $m = -\frac{1}{2}$
C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $m = \frac{1}{2}$
D. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角, 则 m 的取值范围是 $(-\infty, 2)$
- 函数 $f(x) = \sin x + \cos 2x$ 在区间 $(0, 3\pi)$ 上的零点个数为
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6
- 已知 $(3x+1)^{2025} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2025}x^{2025}$, 则 $\frac{4}{3}a_1 + (\frac{4}{3})^2a_2 + \cdots + (\frac{4}{3})^{2025}a_{2025}$
被 4 除的余数为
A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

7. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长相等, 且 $\angle A_1AB = \angle A_1AC = \angle BAC = 60^\circ$, 则异面直线 AB 与 B_1C 所成角的余弦值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知 $\triangle ABC$ 中, $BC = 1$, $AB = 2$, $\sqrt{3} \sin(B + \frac{\pi}{6}) = \sin(B - \frac{\pi}{3})$, 若 $\angle B$ 的平分线交 AC 于点 D , 则 BD 的长为

- A. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图象关于点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$ 中心对称, 则

A. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3})$ 上单调递减

B. 直线 $x = -\frac{2\pi}{3}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条对称轴

C. $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$

D. 将 $y = f(x)$ 的图象上各点先向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位(纵坐标不变), 再将横坐标变为原来的 3 倍(纵坐标不变), 得到函数 $y = \cos(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6})$ 的图象

10. 已知函数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 3$, 则

A. 当 $m = 4$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增

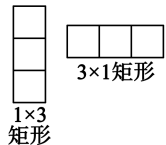
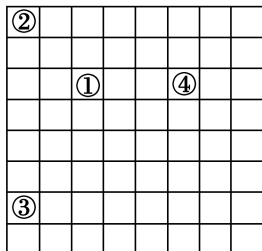
B. 当 $m \leq 3$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个极值

C. 过点 $(0, 1)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有且仅有一条

D. 当 $m = 1$ 时, 直线 $ax - by + a - 2b = 0$ 与曲线 $y = f(x)$ 有三个交点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 = -3$

11. 在如图所示 8×8 的方格图中, 去掉以下哪一个方格, 剩下的方格图能用总共 21 个 3×1 或 1×3 的矩形方格图完全覆盖

- A. ①
B. ②
C. ③
D. ④



三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点与抛物线 C 的焦点重合,则 C 的标准方程为_____.

13. 已知函数 $f(x) = a^{(x-1+\log_a 2)}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 恒过定点 A ,则点 A 的坐标为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$, a_i ($i=1,2,\dots,n$) 等可能取 $-1,1,2,-2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=1$, 且 $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$, 则 $b_4=4$ 的概率为_____.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=20$, $a_{n+1}=a_n+2^n-2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

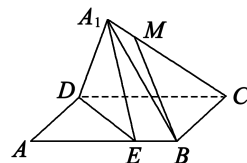
(2) 若 $b_n = a_n - 2^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值.

16. (15 分)

如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AD=2$, $AB=3$, $AE=2EB$, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$.

(1) 若 M 为线段 A_1C 上一点, 且满足 $CM=2MA_1$, 求证: 直线 $BM \parallel$ 平面 A_1DE ;

(2) 当平面 $A_1DE \perp$ 平面 $ABCD$ 时, 求点 D 到平面 A_1BE 的距离.



17. (15 分)

每次抛掷一枚质地均匀的六面体骰子, 若出现偶数点得 2 分, 奇数点得 1 分. 已知每次抛掷出现偶数点和奇数点的概率都是 $\frac{1}{2}$, 且结果相互独立.

(1) 求在抛掷过程中, 恰好得 3 分的概率;

(2) 记抛掷 n 次得分为 X_n , 求 X_n 的分布列及数学期望.

18. (17 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点为 F , C 上一动点 D 到 F 的距离的取值范围为 $[\sqrt{6}-2, \sqrt{6}+2]$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 设斜率为 k ($k \neq 0$) 的直线 l 过 F 点, 交 C 于 A, B 两点. 记线段 AB 的中点为 N , 直线 ON 交直线 $x=3$ 于点 M , 直线 MF 交 C 于 P, Q 两点.

① 求 $\angle MFA$ 的大小;

② 求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 + x$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 判断 $f(x)$ 的极值点个数;

(2) 若不等式 $f(x) > a e^{x-1} + (1-a)x^2$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.