2024～2025 学年度第一学期期末质量检测

高二数学参考答案及评分标准

一、单项选择题（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	D	A	B	C	C

二、多项选择题(每小题 6 分，共 18 分)

9. CD　　10. ACD　　11. ABC

三、填空题(每小题 5 分，共 15 分)

13. $(0,\dfrac{1}{16})$　　13. 89　　14. $[-14,2]$

四、解答题(共 77 分)

（注意：答案仅提供一种解法，学生的其他正确解法应依据本评分标准，酌情赋分. ）

15.（本小题满分 13 分）

解:（Ⅰ）因为 $a_1=1=\dfrac{1}{9}\times(10-1)$，

$$a_2=11=\frac{1}{9}\times(10^2-1),$$

$$a_3=111=\frac{1}{9}\times(10^3-1),$$

$$a_4=1111=\frac{1}{9}\times(10^4-1),$$

$$a_5=11111=\frac{1}{9}\times(10^5-1),$$

所以该数列的一个通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{9}\times(10^n-1)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$. ....6 分

（Ⅱ）$S_n=\dfrac{1}{9}\times[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)]$

$=\dfrac{1}{9}\times(10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n)$ ....8 分

$=\dfrac{1}{9}[\dfrac{10(1-10^n)}{1-10}-n]$

$=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{81}\ (n\in\mathbf{N}^*)$. .... 13 分

16.（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）当直线过原点时，

直线 l 斜率为 $k=\dfrac{2-0}{1-0}=2$， .... 1 分

故直线 l 方程为 $y=2x$，即 $2x-y=0$. .... 3 分

当直线不过原点时，设直线 l 方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$. .... 4 分

则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}=1$，

解得 $a=3$. .... 6 分

故直线 l 方程为 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1$，

即 $x+y-3=0$.

综上，所求直线方程为 $2x-y=0$ 和 $x+y-3=0$. .... 7 分

（Ⅱ）设直线 l 方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1(a>0,b>0)$. .... 8 分

因为直线 l 过点 $P(1,2)$，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$. .... 9 分

故 $1=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{ab}}$（当且仅当 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}$，即 $a=2$，$b=4$ 时等号成立），

所以 $ab\geq 8$. .... 13 分

故 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}ab\geq 4$，

即 $\triangle AOB$ 面积最小值为 4，

此时直线方程为$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$，即$2x+y-4=0$. .... 15 分

17.（本小题满分 15 分）

解:（Ⅰ）依题意，线段AB的中点$(0,1)$，

直线AB的斜率$k_{AB}=\frac{2-0}{-1-1}=-1$，

则线段AB的垂直平分线的方程为$y=x+1$. .... 3 分

由$\begin{cases} y=x+1, \\ 2x-y+2=0. \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=-1, \\ y=0. \end{cases}$

因此圆C的圆心$C(-1,0)$. .... 6 分

半径$r=|CA|=2$， .... 7 分

所以圆C的方程为$(x+1)^2+y^2=4$. .... 8 分

（Ⅱ）由直线$x=ay+4$被曲线C截得弦长为$2\sqrt{3}$，

得圆心$C(-1,0)$到直线$x=ay+4$的距离:

$$d=\sqrt{r^2-(\sqrt{3})^2}=1. \quad \text{.. 11 分}$$

因此$\frac{|-1-a\cdot 0-4|}{\sqrt{a^2+1}}=1$，

解得$a=\pm 2\sqrt{6}$，

所以实数a的值为$\pm 2\sqrt{6}$. .... 15 分

18.（本小题满分 17 分）

解：（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$， AD， $AB\subset$ 平面 $ABCD$，

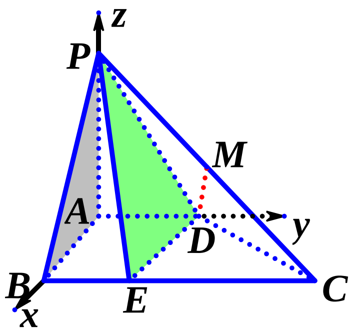
所以 $PA\perp AD$， $PA\perp AB$，

又 $AB\perp AD$，

所以 PA， AB， AD 两两垂直. ....1 分

以 A 为坐标原点， AB 所在直线为 x 轴， AD 所在直线为 y 轴， AP 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如下图所示. ....2 分

则 $P(0,0,2)$， $B(2,0,0)$， $D(0,2,0)$， $C(2,4,0)$，



因为点 M 为 PC 中点，

所以 $M(1,2,1)$， $\overrightarrow{DM}=(1,0,1)$，

又 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$， $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$. ....4 分

所以 $\overrightarrow{DM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

所以 $\overrightarrow{DM}$， $\overrightarrow{AP}$， $\overrightarrow{AB}$ 为共面向量. ....6 分

则在平面 PAB 内存在直线 l 与平面 PAB 外的直线 DM 平行，

所以 DM // 平面 PAB. ....8 分

（Ⅱ）设 $BE=a$，则 $E(2,a,0)$， $0\le a\le 4$， $\overrightarrow{DP}=(0,-2,2)$， $\overrightarrow{DE}=(2,a-2,0)$，

依题意可知，平面 ADE 的法向量为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$. ....10 分

设平面 PDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DP}\cdot\boldsymbol{n}=-2y+2z=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=2x+(a-2)y=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $\boldsymbol{n}=(\frac{2-a}{2},1,1)$． .... 13 分

因为平面 PDE 与平面 ADE 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，

所以 $|\cos<\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3}$，

即 $\frac{2}{2\times\sqrt{(\frac{2-a}{2})^2+1+1}}=\frac{2}{3}$，

解得 $a=1$ 或 $a=3$． .... 16 分

所以存在点 E 使得平面 PDE 与平面 ADE 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$，

此时 $BE=1$ 或 $BE=3$． .... 17 分

19.（本小题满分 17 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C 的半焦距为 c，由已知 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$a-c=\sqrt{6}-2$，

求得 $a=\sqrt{6}$，$c=2$． .... 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=6-4=2$． .... 3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$． .... 4 分

（Ⅱ）由已知椭圆 C 的右焦点为 $F(2,0)$，

直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$．

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x-2)\end{cases}$，

可得$(3k^2+1)x^2-12k^2x+12k^2-6=0$. ……………………………………………5 分

则$\Delta=144k^4-24(2k^2-1)(3k^2+1)=24(k^2+1)>0$

$x_1+x_2=\dfrac{12k^2}{3k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{12k^2-6}{3k^2+1}$. ……………………………………………6 分

于是有$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-4k=\dfrac{-4k}{3k^2+1}$. ……………………………………………7 分

因为AB的中点为N，

所以$N(\dfrac{6k^2}{3k^2+1},\dfrac{-2k}{3k^2+1})$. ……………………………………………8 分

因此直线ON的斜率$k_{ON}=-\dfrac{1}{3k}$，

因为直线$ON:y=-\dfrac{1}{3k}x$交直线$x=3$于点M，

所以$M(3,-\dfrac{1}{k})$.

故直线MF的斜率为$k_{MF}=\dfrac{-\frac{1}{k}-0}{3-2}=-\dfrac{1}{k}$， ……………………………………………10 分

即得$k_{MF}\cdot k_{AB}=-1$，因此直线MF与直线PQ垂直，

所以$\angle MFA=\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………………11 分

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\dfrac{12k^2}{1+3k^2})^2-4\times\dfrac{12k^2-6}{1+3k^2}}=\dfrac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$. ……………………………………………12 分

因为$k_{MF}\cdot k_{AB}=-1$，

同理可得$\left|PQ\right|=\dfrac{2\sqrt{6}[(-\frac{1}{k})^2+1]}{3(-\frac{1}{k})^2+1}=\dfrac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3+k^2}$. .... 13 分

所以四边形$APBQ$的面积

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PQ|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3k^2+1}\cdot\frac{2\sqrt{6}(1+k^2)}{3+k^2}$$

$=\dfrac{12(1+k^2)^2}{(3k^2+1)(3+k^2)}$. .... 14 分

因为$(3k^2+1)(3+k^2)\le[\dfrac{(3k^2+1)+(3+k^2)}{2}]^2=4(1+k^2)^2$,

当且仅当$3k^2+1=3+k^2$，即$k=\pm1$时等号成立，

所以$S=\dfrac{12(1+k^2)^2}{(3k^2+1)(3+k^2)}\ge\dfrac{12(1+k^2)^2}{4(1+k^2)^2}=3$,

故四边形$APBQ$面积的最小值为3. .... 17 分