2025届高三第一学期质量检测

数学参考答案及评分标准

2025.01

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1—4. C B C C 5—8. D B A D

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. AC 10. ABC 11. BCD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. -12 13. 3 14. ①$\frac{2}{9}$(2分) ②$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$(3分)

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解：(1)因为 $\cos 2B=1-\frac{\sqrt{21}}{7}b\sin B$，又 $\cos 2B=1-2\sin^2 B$，

所以 $\frac{\sqrt{21}}{7}b\sin B=2\sin^2 B$，又 $\sin B\neq 0$，

所以 $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sqrt{21}}{14}$. ………………………… 2分

在△ABC 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

因为 $a=\sqrt{7}$，所以 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 4分

因为 A 为钝角，

所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ………………………… 6分

(2)因为 $\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………… 8分

由(1)知 $\frac{b}{\sin B}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，

所以 $b=\frac{2\sqrt{21}}{3}\sin B=2$. ………………………… 9分

又 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{\sqrt{21}}{14}$. ………………………… 11分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times 2\times\frac{\sqrt{21}}{14}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 13分

16. 解：(1)设直线 PF_1 的方程为 $x=-c$，代入椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

解得点 P 的坐标是 $\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$. ………………………… 1分

因为 $k_{OP}=-\frac{b^2}{ac}$，$k_{AB}=-\frac{b}{a}$，且 $AB\parallel OP$，得 $\frac{b^2}{ac}=\frac{b}{a}$，$b=c$. ………………………… 3分

又因为 $a^2=b^2+c^2$，所以 $a=\sqrt{2}c$. ………………………… 4分

因为 $a+c=|F_1A|=2+2\sqrt{2}$，所以 $(1+\sqrt{2})c=2+2\sqrt{2}$，$c=2$. ………………………… 5分

得 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$.

所以，椭圆的方程为 C：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………… 6分

(2)由题意知，$F_2(2,0)$，直线 BF_2 的斜率为 $k_{BF_2}=\frac{2-0}{0-2}=-1$，

则直线 BF_2 的方程为 $y=-(x-2)$，即 $y=2-x$. ………………………… 7分

由 $\begin{cases}y=2-x\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，消去 x 并整理得 $3x^2-8x=0$，………………………… 8分

解得 $x=0$(舍去)或 $x=\frac{8}{3}$，此时 $y=2-\frac{8}{3}=-\frac{2}{3}$，

故点 Q 的坐标为 $\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3}\right)$. ………………………… 9分

所以 $|F_2Q|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}-2\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-0\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. ………………………… 10分

又由题知，点 P 的坐标为 $(-2,\sqrt{2})$. ………………………… 11分

设点 P 到直线 F_2Q 的距离为 d，

则 $d=\frac{|-2+\sqrt{2}-2|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}-1$. ………………………… 13分

故 $S_{\triangle PQF_2}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|F_2Q|=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-1)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4-\sqrt{2}}{3}$. ………………………… 15分

17. 解：(1)设 A_i="甲同学在第一阶段选择路线 i" $i=1,2$，

B="甲同学在第二阶段选择路线①"，则

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(B|A_1)=\frac{2}{3}$，$P(B|A_2)=\frac{1}{3}$，………………………… 2分

所以 $P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$，………………………… 4分

(2)记 C="每位同学第一、第二两阶段都选择路线①"，

则 $P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$. ………………………… 5分

因为路线选择是相互独立的，所以 X 服从二项分布 $X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$. ………………… 6 分

所以期望 $E(X)=np=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，………………………………………………… 8 分

方差 $D(X)=np(1-p)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$. ……………………………………… 10 分

(3)r 的可能取值为 $0,1,2,\cdots,30$，此时 $r\sim B\left(30,\frac{1}{3}\right)$.

所以 $f(r)=C_{30}^{r}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{r}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{30-r}$，……………………………………… 11 分

则 $\begin{cases}C_{30}^{r}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{r}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{30-r}\geqslant C_{30}^{r-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{31-r}\\C_{30}^{r}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{r}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{30-r}\geqslant C_{30}^{r+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{r+1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{29-r}\end{cases}$ ………………… 12 分

故 $\begin{cases}\frac{30!}{r!\ (30-r)!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot 2^{30-r}\geqslant\frac{30!}{(r-1)!\ (31-r)!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot 2^{31-r}\\\frac{30!}{r!\ (30-r)!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot 2^{30-r}\geqslant\frac{30!}{(r+1)!\ (29-r)!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot 2^{29-r}\end{cases}$，

解得 $\frac{28}{3}\leqslant r\leqslant\frac{31}{3}$，又 $r\in\mathbf{N}^{*}$，……………………………………………… 14 分

所以当 $r=10$ 时，$f(r)$ 取最大值. ……………………………………………………… 15 分

18. 证明：(1)在△ABC 中，因为 $AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，$AC=4$，满足 $AB^2+BC^2=AC^2$，

所以 $AB\perp BC$. ……………………………………………………………………… 1 分

因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$BC\subset$ 平面 ABC，$AB\perp BC$，

故 $BC\perp$ 平面 PAB. ……………………………………………………………… 2 分

又因为 $PA\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PA$. ……………………………………………… 3 分

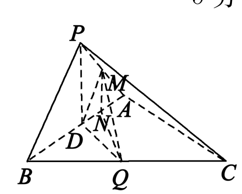
因为△PAB 是等腰直角三角形，$PA=PB$，

所以 $PA\perp PB$. ……………………………………………………………………… 4 分

又 $PB\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，$PB\cap BC=B$，

所以 $PA\perp$ 平面 PBC. ………………………………………………………………… 5 分

方法一



(2)如图，取 AB 的中点为 D，PA 的中点为 M，BC 的中点为 Q，连接 DM，DQ，MQ，

则 $DM\parallel PB$，$DQ\parallel AC$.

所以∠MDQ 即为异面直线 PB 与 AC 的夹角或其补角. …… 7 分

且 $DM=\frac{1}{2}PB=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$DQ=\frac{1}{2}AC=2$. ……………………………………………… 8 分

取 AD 的中点为 N，连接 MN，NQ，

则 $MN=\frac{1}{2}PD=\frac{1}{4}AB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $MN\perp AB$.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，

所以 $MN\perp$ 平面 ABC

又因为 $NQ\subset$ 平面 ABC，所以 $MN\perp NQ$.

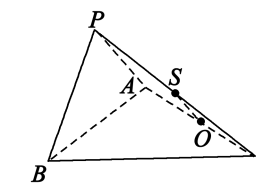
所以在 Rt△NBQ 中，$NQ^2=BN^2+BQ^2=(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+1^2=\frac{31}{4}$，

在 Rt△MNQ 中，$MQ^2=MN^2+NQ^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{31}{4}=\frac{17}{2}$. …………………… 9 分

在△MDQ 中，由余弦定理得

$\cos\angle MDQ=\frac{DM^2+DQ^2-MQ^2}{2DM\cdot DQ}=\frac{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2+2^2-\frac{17}{2}}{2\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times 2}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$，…………………… 10 分

所以异面直线 PB 与 AC 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$. ………………………………… 11 分



(3)由(1)知，$PA\perp$ 平面 PBC，$PC\subset$ 平面 PBC，

则 $PA\perp PC$，△PAC 是直角三角形，

取 AC 的中点为 O，则 $OA=OC=OP$.

又△ABC 是直角三角形，则 $OA=OC=OB$，

于是 $OA=OC=OB=OP$，

故点 O 即为三棱锥 P-ABC 外接球的球心. ………………………………… 13 分

球 O 的半径 $R=OA=\frac{1}{2}AC=2$. ……………………………………………… 14 分

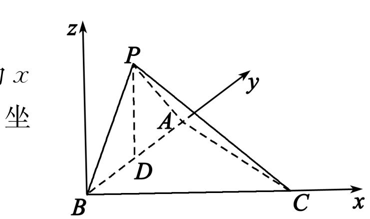
取 PC 的中点为 S，在△PAC 中，$OS\parallel AP$，

又因为 $PA\perp$ 平面 PBC，则 $OS\perp$ 平面 PBC，

则球心 O 到平面 PBC 的距离为 $d=OS=\frac{1}{2}AP=\frac{\sqrt{6}}{2}$. …………………………… 16 分

故点 T 到平面 PBC 距离的最大值为 $d+R=2+\frac{\sqrt{6}}{2}$. …………………………… 17 分

方法二



(2)如图，以 B 为坐标原点，以 BC、BA 所在直线分别为 x 轴、y 轴，以垂直平面 ABC 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系，

取 AB 的中点 D，则 $PD\perp AB$，且 $BD=PD=\sqrt{3}$，

则点 P 的坐标为 $(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$. ………………………………………………… 6 分

又 $B(0,0,0)$，$A(0,2\sqrt{3},0)$，$C(2,0,0)$，

则 $\overrightarrow{BP}=(0,\sqrt{3},\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,-2\sqrt{3},0)$，…………………………………… 7 分

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},\sqrt{3})\cdot(2,-2\sqrt{3},0)=-6$，

$|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{0^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$,

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2+0^2}=4$, …………………… 8分

$\cos\langle\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-6}{\sqrt{6}\times4}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$, …………………… 10分

故异面直线 PB 与 AC 的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. …………………… 11分

(3)设三棱锥 P-ABC 外接球的球心 O 的坐标为(x,y,z),

则由$\begin{cases}OB^2=OA^2,\\OB^2=OC^2,\\OB^2=OP^2,\end{cases}$可得$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x^2+(y-2\sqrt{3})^2+z^2,\\x^2+y^2+z^2=(x-2)^2+y^2+z^2,\\x^2+y^2+z^2=x^2+(y-\sqrt{3})^2+(z-\sqrt{3})^2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1,\\y=\sqrt{3},\\z=0,\end{cases}$即 $O(1,\sqrt{3},0)$. …………………… 13分

球 O 的半径 $R=OB=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$, …………………… 14分

由(1)知,$PA\perp$平面 PBC,则平面 PBC 的一个法向量为$\overrightarrow{PA}=(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$,

又因为$\overrightarrow{BO}=(1,\sqrt{3},0)$,则球心 O 到平面 PBC 的距离为

$d=\dfrac{|\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PA}|}=\dfrac{|(1,\sqrt{3},0)\cdot(0,\sqrt{3},-\sqrt{3})|}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. …………………… 16分

故点 T 到平面 PBC 距离的最大值为 $d+R=2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. …………………… 17分

方法三

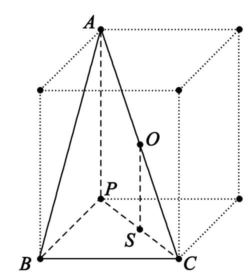
(3)如图,分析可知,

三棱锥 P-ABC 经旋转可放入长方体中,

取 AC 的中点为 O,

故点 O 即为三棱锥 P-ABC 外接球的球心.

以下同方法一.



19. 解:(1)方法一　当 $a=0$ 时,$f(x)=e^x-bx-1$,$f'(x)=e^x-b$. …………………… 1分

当 $b\leqslant1$ 时,因为 $x\geqslant0$,$e^x\geqslant1$,

所以 $f'(x)=e^x-b\geqslant0$,$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

则 $f(x)\geqslant f(0)=e^0-b\times0-1=0$,满足 $f(x)\geqslant0$ 恒成立. …………………… 3分

当 $b>1$ 时,令 $f'(x)=0$,即 $e^x-b=0$,解得 $x=\ln b$.

当 $0\leqslant x<\ln b$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;

当 $x>\ln b$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

所以 $f(\ln b)<f(0)=0$,不满足 $f(x)\geqslant0$ 恒成立. …………………… 6分

综上,b 的取值范围是$(-\infty,1]$. …………………… 7分

方法二　因为 $a=0$,所以 $f(x)\geqslant0\Leftrightarrow bx\leqslant e^x-1$. …………………… 1分

①当 $x=0$ 时,$0\leqslant0$,所以 $b\in\mathbf{R}$; …………………… 2分

②当 $x>0$ 时,$b\leqslant\dfrac{e^x-1}{x}$,记 $h(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$,$x>0$ …………………… 3分

$h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$,记 $\varphi(x)=e^x(x-1)+1$,$x>0$,$\varphi'(x)=xe^x>0$

所以 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$\varphi(x)>\varphi(0)=0$,所以 $h'(x)>0$

所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. …………………… 5分

又由洛必达法则知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$. …………………… 6分

所以 $b\leqslant1$. …………………… 7分

(2)当 $a>0$,$b=0$ 时,由题意知 $e^x-ax^2-1=e^x-1-x\ln x$,

即 $\ln x=ax(x>0,a>0)$. …………………… 8分

因为方程 $f(x)=g(x)$存在两个不同的实根 x_1,x_2,不妨设 $x_1>x_2>0$,

所以 $\ln x_1=ax_1$,$\ln x_2=ax_2$,

两式相加得,$\ln x_1+\ln x_2=a(x_1+x_2)$. ① …………………… 9分

两式相减得,$\ln x_1-\ln x_2=a(x_1-x_2)$,

因为 $x_1\neq x_2$,所以$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=a$. ② …………………… 10分

要证明 $x_1x_2>e^2$,

即证明 $\ln x_1+\ln x_2>2$, …………………… 11分

由①得,即证明 $a(x_1+x_2)>2$, …………………… 12分

由②得,即证明$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$,

即证明 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$, …………………… 13分

令$\dfrac{x_1}{x_2}=t$,则 $t>1$,

即证明 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$. …………………… 14分

令 $u(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$,

则 $u'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$, …………………… 16分

故 $u(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,所以 $u(t)>u(1)=0$,

即 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$成立,得证. …………………… 17分